This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

THE
IGAN

Physics Library
QC
721
.B92

3059

10.6

Alexander Ziwet

MATHEMATISCHE EINFÜHRUNG IN DIE ELEKTRONENTHEORIE

VON

DR. ALFRED HEINRICH BUCHERER,

PRIVATDOZENT AN DER UNIVERSITÄT BONN.

MIT 14 FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1904.

Prof. Alex. Ziwet.
gt.
3-2-1923

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESZLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Vorwort.

Die zunehmende Bedeutung, welche der Elektronentheorie für die Entwickelung der gesamten theoretischen Physik zukommt, hat mich veranlaßt, eine einfache, möglichst klare Darstellung der mathematischen Grundlagen der Theorie zu schreiben. An einer solchen fehlte es bisher.

Die große Ausdehnung, welche das Gebiet erlangt hat, legte mir bei der Wahl des Stoffes gewisse Beschränkungen auf. Ich habe deshalb das prinzipiell Wichtige herausgegriffen und die Gesetzmäßigkeiten der Elektronenphänomene zum Teil unter vereinfachenden Annahmen, aber immer unter beständigem Hinweis auf den Zusammenhang von Theorie und Experiment abgeleitet. Ich glaube dadurch dem Leser ein lebendiges Bild von dem gegenwärtigen Stande der Theorie gewährt zu haben. Detaillierte Darstellungen über einzelne Gegenstände wird der Leser in den Originalabhandlungen finden. Nachdem das wunderbar gründliche und zusammenfassende Werk von H. A. Lorentz in der Enzyklopädie der Mathematik erschienen ist, steht dem Forscher auf diesem Gebiete ein sehr reiches, wohlgeordnetes Material zur Verfügung. Besonders sei auch auf die genialen Arbeiten O. Heavisides hingewiesen. Sie enthalten reiche Schätze, wenn auch nicht in leicht zugänglicher Form. Eine bedeutende Arbeit von A. Sommerfeld über das Feld beliebig bewegter Elektronen kam leider zu spät zu meiner Kenntnis, um noch berücksichtigt zu werden.

Der Kundige wird in bezug auf die mathematische Form und auch in dem dargebotenen Material vielfach meine eigene Arbeit erkennen. Bei der Umschreibung des bisher gesicherten Besitzstandes der Theorie habe ich nicht allein eine dogmatische Stellungnahme vermieden, sondern auch über manche Frage meine eigene Ansicht zum Ausdruck gebracht.

Die mathematischen Entwickelungen habe ich mich bemüht so klar und durchsichtig zu gestalten, daß ich hoffen darf, daß meine Arbeit in weiteren Kreisen Verständnis finden wird.

Bonn, im Juli 1904.

A. H. Bucherer.

418795

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung 1
Die allgemeinen Grundlagen der Elektronentheorie und eine Übersicht über die experimentellen Erscheinungen.

§ 1. Die Hauptvektoren der Elektronentheorie und ihre Bestimmungsgleichungen 9

§ 2. Die elektrodynamischen Kräfte 18
Spannungen im Äther. Das Gesetz von der Erhaltung der Energie.

§ 3. Das Kraftfeld bewegter Ladungen 28
Translatorische Bewegung. Die bewegte Punktladung. Das bewegte Ellipsoid.

§ 4. Die elektromagnetische Energie der bewegten Ladung . . . 44
Ellipsoid. Kugel.

§ 5. Der Begriff der elektromagnetischen Masse 51
Die kinetische Masse. Die longitudinale, die transversale Masse eines nicht deformierten Elektrons. Das deformierte Elektron.

§ 6. Theorie und Experiment 60

§ 7. Der Temperaturkoeffizient der Radioaktivität 68

§ 8. Rotierende Ladungen 70

§ 9. Eine Umformung der Grundgleichungen 76
Die Potentiale von Liénard und Wiechert.

§ 10. Eine weitere Umformung 86
Die Heavisideschen Gleichungen.

§ 11. Die Strahlung schwingender Elektronen 90
Lineare, kreisförmige, elliptische Bewegung eines Elektrons. Die Energie der Strahlung. (Larmor.)

§ 12. Der Zeemaneffekt 96
Das normale Triplet.

§ 13. Die Theorie der Röntgenstrahlen 105

§ 14. Der Einfluß der Bewegung auf optische Erscheinungen . . . 112
Dopplersches Prinzip. Aberration. Strahlungsintensität einer bewegten Lichtquelle.

§ 15. Der Einfluß der Erdbewegung auf die Optik irdischer Lichtquellen 121
Die elektromagnetischen Kräfte bei gemeinsamer Bewegung von Lichtquelle und Beobachter. Korrespondierende Systeme. Der Michelson-Morleysche Interferenzversuch.

§ 16. Die Elektronenphänomene beeinflußt durch die Materie . . . 133

§ 17. Die Grundlagen der Dispersionstheorie 137

Anhang: Die Hauptformeln der Vektorenrechnung.

Einleitung.

Die Zeit, welche auf die unvergleichlichen Arbeiten von Heinrich Hertz folgte, ist ausgezeichnet durch eine solche Fülle von glänzenden Entdeckungen auf experimentellem Gebiete, wie sie nie zuvor in eine so enge Zeitspanne zusammengedrängt gewesen ist. Der Theoretiker, welcher die Gesetzmäßigkeiten der neuen Erscheinungen in sein System einfügen will, wird beständig in Atem gehalten durch Nachprüfen, Einschränken und Umbilden seiner Hypothesen. Kaum hatte Hertz, wie man glaubte, der Maxwellschen Theorie zum Siege verholfen, als auch schon wichtige, neue Erscheinungen, an deren Entdeckung Hertz noch kurz vor seinem frühen Dahinscheiden Anteil hatte, zu einer Anpassung an die älteren Anschauungen zwangen und allmählich zu einem siegreichen Vordringen der Elektronentheorie führten.

Nicht etwa wurde die Maxwellsche Theorie verlassen und eine Elektronentheorie zur selben Zeit geschaffen; die Maxwellschen Vorstellungen von der zeitlichen Ausbreitung elektrischer und magnetischer Kräfte von Teilchen zu Teilchen eines Zwischenmediums, welches elastischer Deformationen fähig ist, bleibt bestehen. Aber mit diesen Vorstellungen verwächst mehr und mehr zu organischer Einheitlichkeit eine Hypothese, welche schon lange eine wichtige Sonderexistenz in der Dispersionstheorie geführt hatte: die Hypothese, daß alle magnetischen, elektrischen und Strahlungserscheinungen auf die Verteilung und auf die Bewegungen von elektrischen Elementarquanten zurückzuführen seien. Die Vorstellung, daß in jeder Materie äußerst kleine Teilchen vorhanden seien,

von denen der eine Teil eine unabänderliche positive und der andere Teil eine ebenfalls unveränderliche negative Ladung habe, lag wohl am nächsten. Aber die zunehmende Erkenntnis, daß die negativen Teilchen noch durch andere wichtige Eigenschaften als durch ihr Vorzeichen von den positiven Partikeln differentiiert seien, führte zu einer weniger einfachen Auffassung. Es wäre heute, wo noch täglich neue experimentelle Entdeckungen unsere Hypothesen beeinflussen, zu früh, endgültige Urteile über die Natur der negativen und positiven Partikel zu geben und vor allem die wichtige Frage nach dem Zusammenhange von Elektrizität und Materie lösen zu wollen. Im Hinblick auf die Gesamtheit des vorliegenden experimentellen Materials dürfte man aber mit dem nötigen Vorbehalt die Meinung aussprechen, daß die negativen Partikel kein eigentliches materielles Substrat besitzen und daß die Materie an und für sich die Eigenschaften positiver elektrischer Ladungen besitzt. Die positive Elektrizität haftet, mit anderen Worten, unveränderlich an der Materie. Bringt man eine zunehmende Anzahl von Elektronen zur Materie, welche vorher frei davon war, so erscheint sie immer weniger positiv, wird dann neutral und bei der Zufuhr von noch mehr Elektronen negativ elektrisch. Daß die „Masse" der Körperatome sich endgültig auch als scheinbar erweisen wird, ist möglich.

Die Leiter der Elektrizität sind dadurch ausgezeichnet, daß die Elektronen in ihnen je nach den vorhandenen Reibungswiderständen mehr oder weniger frei beweglich sind, ohne durch elastische Kräfte in ihre ursprüngliche Lage zurückgezogen zu werden. In Nichtleitern sind die Elektronen durch elastische Kräfte an bestimmte Gleichgewichtslagen gebunden, um welche sie Schwingungen ausführen können und aus welchen sie durch äußere Kräfte nur sehr wenig verschoben werden können. Die Wirkung, welche die Elektronen aufeinander ausüben, werden, wie bereits erwähnt, durch den Äther vermittelt. Bringt man also eine Ladung an einen bestimmten Punkt des Äthers, so wird angenommen, daß die Wirkung, welche sie erfährt, direkt von dem Zustand des

Äthers an der betreffenden Stelle und indirekt von der Lage und der Bewegung der an anderen Stellen befindlichen Elektronen abhängt.

Es ist bemerkenswert, daß wir hiermit mathematisch gesprochen zu der Problemstellung der älteren Elektrizitätslehre zurückgekehrt sind. Denn wenn wir auch das Bild eines die elektromagnetischen Wirkungen vermittelnden Äthers verwenden, so ist das Gleichungssystem, welches diese Wirkungen bestimmt, doch, soweit die beobachtbaren Erscheinungen in Frage kommen, nicht notwendigerweise verschieden von dem System, zu welchem eine sich auf die älteren Anschauungen aufbauende, konsequent durchgeführte d. h. die zeitliche Ausbreitung der Kräfte in richtiger Weise in Rechnung ziehende Theorie führt. Die Schwierigkeit der letzteren Anforderung war den bedeutendsten Vertretern der älteren Schule, vor allem Gauß, wohl bewußt, und die Lösung des Problems, welche von Riemann erstrebt wurde, scheiterte im Grunde genommen nur an einem bei der Integration seiner Differentialgleichung begangenen Fehler, nämlich der Auffassung des Elementarquantums der Elektrizität als einer punktförmigen Ladung.

Ja, man könnte noch einen Schritt weiter gehen und sich die Frage vorlegen, ob sich die Einwirkung zweier Elektronen aufeinander auf Grund der zeitlichen Ausbreitung der elektrodynamischen Kräfte ohne bestimmtes Bild nicht unter vollständiger Übereinstimmung mit der Erfahrung formulieren ließe, so daß auch gewisse optische Erscheinungen — es handelt sich um den Einfluß der Erdbewegung auf die Interferenz des Lichtes, welche der modernen Elektronentheorie Schwierigkeiten bereitet — ihre ungezwungene Erklärung fänden. Eine derartige Theorie hätte die Aufgabe zu lösen, eine Einwirkung der translatorischen Bewegung auf die zwischen den Elektronen tätigen Kräfte nur dann zuzulassen, wenn die relative Lage der Elektronen zueinander dadurch geändert wird. —

Es ist eine der Hauptannahmen der modernen Elektronentheorie, daß der Äther ruht, d. h. daß er

an der Bewegung nicht teilnimmt. Der Äther durchdringt alle Materie. Mit dieser letzteren Auffassung stellt sich die Elektronentheorie in einen gewissen Gegensatz zur Maxwellschen Theorie. In der Maxwellschen Theorie spielt das Dielektrikum dieselbe Rolle wie der Äther, indem es in dieselbe Art von Polarisationszuständen versetzt werden kann und in genau derselben Weise elektromagnetische Wirkungen vermittelt. Der elektrische Zwangszustand, in welchen man ein Dielektrikum versetzt, indem man es z. B. zwischen die Platten eines Kondensators bringt, wird aber nach Lorentz erklärt durch die Einwirkung, welche der auch im Dielektrikum vorhandene Äther auf die im Dielektrikum verteilten Elektronen ausübt. Die Elektronen wirken ihrerseits auf die mit ihnen „verbundene" Materie.

Die Ablenkung der Kathodenstrahlen und verwandte Erscheinungen.

Bevor wir zu einer mathematischen Formulierung der Elektronentheorie übergehen, ist es nützlich, die wesentlichen Erscheinungen, welche bei der Entladung durch verdünnte Gase auftreten, und verwandte Erscheinungen in Erinnerung zu bringen. Bei der Entladung der Elektrizität durch eine Geislersche Röhre beobachten wir, wie an der Kathode und in ihrer Umgebung sich eigentümliche Vorgänge abspielen. Lassen wir den Funken bei zunehmender Verdünnung durchschlagen, so finden wir, daß die Potentialdifferenz anfangs der Länge der Funkenstrecke angenähert proportional ist und bei zunehmender Verdünnung sich verringert. Überschreitet aber die Verdünnung eine gewisse Grenze, so steigt die Spannung, welche zur Funkenbildung nötig ist, wieder an. Man findet nun, daß die Entladung von der Lage der positiven Elektrode, ihrer Form und sonstigen Beschaffenheit unabhängiger wird und daß der Entladungsvorgang um die Kathode herum die erhöhte Potentialdifferenz erfordert. Bei den sehr hohen Verdünnungen, bei welchen noch ein Durchgang der Elektrizität möglich ist, zeigen sich nun höchst be-

merkenswerte Erscheinungen in ihrer reinsten Form. Die Glaswand, welche schon vorher in der Nähe der Kathode in grünlichem Lichte leuchtet, nimmt einen intensiv apfelgrünen Schein an. Bringt man feste Substanzen in die Nähe der Kathode, so leuchten diese ebenfalls in glänzendem Phosphoreszenz-Lichte. Metalle, welche sich zwischen Kathode und Glaswand befinden, werfen Schatten, aus welchen man auf eine geradlinige Bahn der von der Kathode ausgehenden „Strahlen" schließen muß. Durch ganz dünne Metallbleche gehen die Kathodenstrahlen hindurch. Im allgemeinen ist ein Körper um so durchlässiger, je geringer sein spezifisches Gewicht. Die Strahlen entwickeln eine bedeutende Wärmemenge, wenn sie auf dickere Metallmassen auftreffen. Die Strahlen, welche nach dem Auftreffen das Metall verlassen, sind nicht etwa reflektierte Kathodenstrahlen, sondern Strahlen, welche in bestimmten wesentlichen Eigenschaften abweichen.

Läßt man Kathodenstrahlen in einen hohlen isolierten Metallkörper eintreten, so zeigt er negative Ladung. Eine der bemerkenswertesten Eigenschaften der Kathodenstrahlen ist ihre Ablenkbarkeit durch den Magneten. Man weist dies leicht dadurch nach, daß man die Strahlen durch ein kleines Aluminiumblechfensterchen aus der Röhre austreten und auf einen phosphoreszierenden Schirm auffallen läßt. Bringt man einen Magnet heran, so verschiebt sich sofort die phosphoreszierende Fläche. Die Ablenkung ist genau dieselbe, welche ein von der Kathode geradlinig ausgehender Konvektionsstrom negativ geladener Partikel erfahren würde. Eine Bestätigung dieser Annahme bildet die Ablenkbarkeit der Strahlen in einem elektrischen Felde. Sowohl die Ablenkung im magnetischen als auch im elektrischen Felde ist unabhängig von dem Elektrodenmaterial und von der Natur des verdünnten Gases.

Es ist bemerkenswert, daß Kathodenstrahlen auch erzeugt werden, wenn ultraviolettes Licht auf negativ geladene Körper fällt. Diese Entdeckung machte Hertz im Jahre 1887. Man kann die Wirkung des Lichtes dadurch erklären, daß man annimmt, seine Schwingungen versetzen die Elektronen des

betreffenden geladenen Metalles in eine oszillierende Bewegung. Bei der Oszillation werden dann die Elektronen abgeschleudert. Eine verwandte Erscheinung ist die Erzeugung von Kathodenstrahlen durch Erhitzen von Metallen und Kohle bis zur Weißglut.

Es gibt noch eine zweite Art von Strahlen, welche sich in der Umgebung der Kathode aus dem verdünnten Gase bilden und deren Charakter von der Natur des Gases abhängt. Diese Strahlen erweisen sich durch die Art ihrer Ablenkung im magnetischen und elektrischen Felde als die Bahnen positiv geladener Gaspartikel. Sie rufen auch Phosphoreszenz hervor. Man hat sie Kanalstrahlen genannt wegen der Art ihres Nachweises. Man verfährt nämlich nach dem Vorgang ihres Entdeckers Goldstein in der Weise, daß man den Kathodenraum von dem Anodenraum durch eine siebförmige Wand trennt. Es treten dann durch die Löcher der Wand d. h. durch die Kanäle Strahlen ein, welche die erwähnten Eigenschaften haben. Die Kanalstrahlen unterscheiden sich, abgesehen von den Vorzeichen der Ladungen der Partikel, wesentlich von den Kathodenstrahlen dadurch, daß sie von festen Körpern nicht durchgelassen werden und dann auch dadurch, daß ihre Ablenkbarkeit, welche übrigens viel geringer ist als diejenige der Kathodenstrahlen, von dem betreffenden Gase abhängt, in welchem die Entladung stattfindet. Bemerkenswert ist ferner, daß die Kanalstrahlen im magnetischen Felde stark dispergiert werden, d.h. daß die einzelnen Partikel verschieden stark abgelenkt werden. Bei den Kathodenstrahlen ist diese Dispersion auch vorhanden, aber geringer. Bisher sind die Kanalstrahlen nicht in so eingehender Weise untersucht worden wie die Kathodenstrahlen. Ihrer Erforschung stellen sich größere Schwierigkeiten entgegen.

Bei der Erzeugung von Kathoden- und Kanalstrahlen tritt gleichzeitig eine wesentlich andere Art von Strahlung auf, die Röntgenstrahlung. Treffen nämlich die Kathodenstrahlen auf Metallflächen auf, so sind diese Flächen die Ausgangspunkte von impulsiven Ätherstörungen. Wie wir später sehen werden,

hat ein translatorisch sich bewegendes elektromagnetisches Feld, wie die Elektronen es mit sich führen, eine ähnliche Trägheit wie die gewöhnliche Materie. Beim plötzlichen Stillsetzen dieses Feldes erfährt der Äther stoßartige Erschütterungen, welche sich als Röntgenstrahlen ausbreiten. Es ist bekannt, daß diese Strahlen feste Körper wie Metalle, Glas usw. durchdringen, daß sie die Luft leitend machen, indem sie zunächst die Moleküle in neutrale Atome und diese dann in positive Atome und Elektronen spalten, daß sie Phosphoreszenz hervorrufen und daß sie weder im elektrischen noch im magnetischen Felde ablenkbar sind.

Wenn wir schon durch die Untersuchung der Entladungen in Gasen mit neuen, ans Wunderbare grenzenden Eigenschaften der Materie bekannt gemacht wurden, so sind die Ergebnisse dieser Forschungen doch noch übertroffen worden durch die Entdeckung der radioaktiven Substanzen. H. Becquerel hatte bereits im Jahre 1896 entdeckt, daß Uranium und seine Salze die Eigenschaften besitzen, auf photographische Platten zu wirken, selbst wenn letztere in undurchsichtige Kästen eingeschlossen waren. Es zeigte sich dann später, daß diese radioaktiven Eigenschaften von Salzen bisher unbekannter Metalle herrührten, von welchen das Radium besonders intensive Wirkungen zeigte. Die Radiumsalze wurden zuerst durch fraktionierte Fällungen von Curie dargestellt und das Atomgewicht des Radiums zu 225 bestimmt. Aus spektroskopischen Daten haben Runge und Precht das Atomgewicht zu dem etwas abweichenden Werte von 257.8 bestimmt.

Den Strahlungsvorgang begleitet eine Zersetzung, welche mit einem im Vergleich zu gewöhnlichen chemischen Reaktionen außerordentlich großen Energieumsatz verbunden ist.

Nach den Versuchen Ramsays scheint es, als ob die bei der Zersetzung auftretende gasförmige Emanation die eigentliche strahlende Substanz sei. Dieses Gas weist ein dem Neon und Krypton sehr ähnliches Spektrum von scharfen Linien auf. Allmählich verschwinden diese Linien und es tritt das Spektrum des Heliums auf. Sollten diese Beobachtungen

bestätigt werden, so stände man hier vor der höchst bedeutsamen Erscheinung der Umwandlung elementarer Materien.

Die Strahlung der Emanation besteht aus α, β, γ-Strahlen, welche in ihrem Wesen den Kanal-, Kathoden- und Röntgenstrahlen der Gasentladungen entsprechen. Die Röntgenstrahlen entstehen durch die Rückstöße, welche die abfliegenden Elektronen verursachen. Denn wenn die Elektronen beim Auftreffen stoßartige Erschütterungen im Äther erzeugen, so müssen sie beim Abfliegen — man denke an den Rückstoß eines Geschützes — ähnliche Wirkungen hervorbringen.

Außer den Radiumsalzen weisen auch die Salze von „Polonium", Thorium und Aktinium Radioaktivität auf; ja, es scheint nach den von J. J. Thomson angeregten Versuchen, als ob Radioaktivität eine allgemeine Eigenschaft der Materie sei. Die Frage, ob die beobachtete Radioaktivität des ersteren nicht eine induzierte ist, ist noch nicht sicher entschieden. Aktinium behält seine Radioaktivität bei.

Die oben berührte Erscheinung der induzierten Radioaktivität, d. h. die Erscheinung, daß Gegenstände, welche sich in der Nähe von radioaktiven Substanzen befinden, selbst radioaktiv werden, läßt sich wohl am leichtesten durch die Annahme erklären, daß die radioaktive Emanation von der Oberfläche benachbarter Körper absorbiert wird, um allmählich wieder freigelassen zu werden.

Die vielen Rätsel, welche die radioaktiven Substanzen aufgeben, können erst nach langen und mühevollen Forschungen gelöst werden. Heute ist uns nur erst der Fernblick nach einem Wunderlande gestattet. Es verdient aber doch betont zu werden, daß die experimentellen Bestätigungen der Hypothese bezüglich der Natur der Strahlen und besonders bezüglich der Natur des Elektrons sich mehren und zwar erfolgen diese Bestätigungen auf Gebieten der Physik, die scheinbar weit voneinander getrennt sind.

Hier möge vor allem auf die glänzenden Untersuchungen Zeemans über den Einfluß eines magnetischen Feldes auf die Periode des von einer Lichtquelle emittierten Lichtes hin-

gewiesen werden. Die Ergebnisse des Experimentes führen nämlich zu der Annahme, daß die den Linien eines Linienspektrums entsprechenden Lichtschwingungen von sich bewegenden negativ geladenen Elektronen herrühren, deren Ladung zur Masse im selben Verhältnis steht wie bei den Teilchen der Kathoden- und Becquerelstrahlen.

§ 1.

Die Hauptvektoren der Elektronentheorie und ihre Bestimmungsgleichungen.

Indem Maxwell die elektromagnetischen Erscheinungen auf Zustände und Zustandsänderungen eines Mediums zurückführte und hierbei den elektrischen Ladungen nur die Rolle von Hilfsvariablen zuwies, ordnete er die Dielektrika in dieselbe Kategorie von Begriffen ein wie den Äther. Bei ihm unterscheiden sich Äther und ponderables Dielektrikum nur durch einen konstanten Zahlenfaktor, die Dielektrizitätskonstante. Auf großen Gebieten der Erfahrung reicht eine solche Auffassung aus. Aber wie schon eingangs bemerkt wurde, lassen sich wichtige Erscheinungen nicht mit der Maxwellschen Theorie in dieser Fassung vereinbaren. Wir sind vielmehr gezwungen, in die Welt der Atome hinabzusteigen, uns von ihren Eigenschaften passende Bilder zu konstruieren und diese Bilder an der Hand des Experiments auf ihre Berechtigung zu prüfen. Wenn uns die großartigen Strukturen des Maxwellschen Wunderbaues in erstaunende Bewunderung versetzten, so entbehrt doch auch der Mikrokosmos der Atome und Elektronen nicht eines hohen Interesses.

Da unsere Begriffe sich in der unseren Sinnen zugänglichen Welt gebildet haben, so können wir nur dann hoffen, passende Bilder von der Atomwelt zu konstruieren, wenn wir unsere makroskopischen Erfahrungen idealisieren und dabei voraussetzen, daß die Gesetze, welchen sehr große Komplexe von Atomen und Molekülen, d. h. die gewöhnlichen Massen unterworfen sind, auch für die individuellen Atome gelten. Wir konstruieren demgemäß zunächst ein zweckmäßiges Bild

von einem Elektron und leiten die Gesetze ab, welchen es unterworfen ist. Dann betrachten wir — immer noch an der Hand eines im physikalischen Sinne unendlich kleinen Maßstabes — die Gesetzmäßigkeiten, welchen größere Komplexe von Elektronen unterworfen sind. Schließlich prüfen wir die Richtigkeit der so gewonnenen Anschauungen, indem wir unseren Maßstab so weit vergrößern, daß die Materie uns wieder als ein Kontinuum erscheint. Es müssen dann die beobachtbaren Eigenschaften der Materie mit dem Bilde ihrer Mikrostruktur im Einklang stehen. Hier drängt sich die bereits oben berührte fundamentale Frage auf, welches sind die Beziehungen der Körperatome zum Elementarquantum der Elektrizität, zum Elektron. In einer Theorie des Elektrons müßten wir zu dieser Frage Stellung nehmen. Aber diese Stellungnahme kann bei dem unerledigten Stande dieses höchst wichtigen Problems nur eine provisorische sein. Indem wir die Möglichkeit offen lassen, daß alle Massen, also auch die positiven Körperatome, im letzten Sinne elektromagnetischer Natur sind, wollen wir, dem Beispiele von Lorentz folgend, die Materie nur so weit berücksichtigen, als sie auf die Elektronen Molekularkräfte ausübt.

Lorentz bemerkt in dem Werke: Versuch einer Theorie: „Ponderable Materie, welche nicht geladen ist, kommt für uns nur insofern in Betracht, als sie auf die Ionen Molekularkräfte ausübt. Was die elektrischen Erscheinungen betrifft, so hat sie gar keinen Einfluß und geschieht alles so, als ob der von ihr eingenommene Raum nur den Äther enthielte."

Wir wenden uns nunmehr der Theorie des Elektrons zu. Wir leiten die Gesetze ab, nach welchen ein im Äther eingebettetes Elektron auf den Äther wirkt. Der Zustand, in welchen der Äther durch die Lage und die Bewegung eines Elektrons versetzt wird, wird durch Vektoren bestimmt. Die Vektoren, welche die wichtigste Rolle spielen, sind die elektrische Kraft $\mathfrak{E}$, die elektrische Verschiebung $\mathfrak{D}$, die magnetische Kraft $\mathfrak{H}$ und der elektrische Strom $\mathfrak{S}$. Wir werden

später noch andere Vektoren kennen lernen, welche die Rolle von abgeleiteten Hilfsgrößen spielen und dann auftreten, wenn wir den soeben erwähnten Übergang von einem sehr kleinen Maßstabe zu einem großen machen. Um nämlich die Wirkung der vielen einzelnen Elektronen zusammenzufassen, sind wir zu einem Summierungsverfahren gezwungen, bei welchem es hauptsächlich auf Bildung von „Mittelwerten“ ankommt.

Da die Elektronentheorie sich auf die Maxwellschen Anschauungen stützt, so ist es nützlich, die Grundbegriffe der Maxwellschen Theorie in die Erinnerung zu rufen und diese dann mit der Elektronentheorie „des kleinen Maßstabes“ zu vergleichen.

Unter Anlehnung an die Erfahrung definiert Maxwell den Begriff der elektrischen Kraft. Der Raum, welcher eine geladene Kugel umgibt, hat gewisse Eigenschaften, welche sich kundgeben, wenn man an beliebig gewählte Punkte dieses Raumes eine Einheitsladung bringt. Man beobachtet eine Kraft, welche nach Richtung und Größe je nach der Lage des gewählten Punktes variiert. Diese Kraft bezeichnet Maxwell als elektrische Kraft $\mathfrak{E}$. Der Begriff der so definierten Kraft steht im natürlichen Zusammenhange mit dem Begriff der Ladung. Eine Einheitsladung ist ja bekanntlich elektrostatisch gemessen diejenige Elektrizitätsmenge, mit welcher eine unendlich kleine Kugel geladen sein muß, um auf eine ähnliche Kugel, welche dieselbe Ladung hat und ihr im Vakuum in der Entfernung von 1 cm gegenübersteht, mit der Einheit der Kraft zu wirken. Es ist nun weiter für die Maxwellschen Vorstellungen charakteristisch, daß er diese elektrische Kraft als die Ursache eines eigentümlichen Zwangszustandes des umgebenden Mediums auffaßt, ebenso wie eine rein mechanische Kraft als die Ursache des Zustandes einer komprimierten Feder aufgefaßt werden kann. Den durch die elektrische Kraft bewirkten Zustand bezeichnete Maxwell als dielektrische Verschiebung $\mathfrak{D}$. Sie ist eine Vektorgröße, welcher eine kontinuierliche Verteilung in dem betrachteten Raume zukommt. Ihre Richtung fällt mit der Richtung der elektrischen Kraft zu-

sammen und ist in einem isotropen Medium überall proportional der ersteren.

Man hat daher die Gleichung

$$\text{(I)} \qquad \mathfrak{D} = \frac{K}{4\pi}\mathfrak{E}.$$

K bedeutet die Dielektrizitätskonstante. K variiert von Medium zu Medium.

Der Verschiebungsfluß steht in bestimmter Beziehung zum Begriff einer Ladung q. Ist nämlich die Dichte der Elektrizität ϱ_w, so ist nach Maxwell

$$\text{(II)} \qquad \operatorname{div}\mathfrak{D} = \varrho_w \quad \text{und} \quad \int \varrho\, dv = q = \int \mathfrak{D}\, d\mathfrak{g}.$$

Dielektrische Medien können keine Ladungen aufnehmen. In diesen ist daher

$$\text{(III)} \qquad \operatorname{div}\mathfrak{D} = 0.$$

Daher gemäß I

$$\mathfrak{E}\cdot\nabla K + K\cdot\nabla\mathfrak{E} = 0.$$

Man erkennt, daß die elektrische Kraft an den Stellen eines Mediums, wo K variiert, Divergenzstellen hat. Es ist nämlich

$$-\nabla\mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{E}\cdot\nabla K}{K}.$$

Man bezeichnet den $4\pi^{\text{ten}}$ Teil von $\nabla\mathfrak{E}$ als die Dichte der freien Elektrizität.

$$4\pi\varrho_f = \nabla\mathfrak{E}.$$

Auf der Trennungsfläche von zwei Medien, deren Konstanten K verschieden sind, erzeugt die elektrische Kraft Ladungen freier Elektrizität und die elektrischen Eigenschaften einer solchen Fläche lassen sich sehr wohl mit dieser Auffassung in Einklang bringen.

In der Elektronentheorie des kleinen Maßstabes gibt es nur ein Medium, den Äther, dessen Eigenschaften immer dieselben sind. Wenn man eine positive Ladung nacheinander in verschiedene Medien bringt und nun beobachtet, wie eine in die Umgebung gebrachte Einheitsladung je nach dem Medium verschieden stark abgestoßen wird, so muß diese Verschieden-

heit auf das Zusammenwirken der Ladung und der in den Medien befindlichen Elektronen zurückgeführt werden. Man braucht sich nur zu vergegenwärtigen, wie die Kraft, welche zwei geladene Leiter aufeinander ausüben, durch die Anwesenheit anderer Leiter beeinflußt wird, um diese Annahme plausibel zu finden. Es folgt nun weiter: die elektrische Kraft hat in sogenannten dielektrischen Medien keine Divergenzstellen.

Auch Lorentz bringt den Verschiebungsfluß in zahlenmäßige Beziehung zu der Ladung, von welcher er ausgeht. Ist nämlich $d\mathfrak{g}$ ein Element der Fläche, welche die Ladung q umgibt, so ist

$$\int \mathfrak{D}\, d\mathfrak{g} = q. \tag{1}$$

q sei elektromagnetisch gemessen.

Diese Gleichung läßt sich durch Anwendung des Gaußschen Satzes umformen, indem man annimmt, daß die Elektrizität in dem betrachteten Raume eine räumliche Verteilung besitze, deren Dichte ϱ sei. Tatsächlich ist die Verteilung der Elektronen eine diskontinuierliche. Aber in Entfernungen, welche groß sind im Vergleich zum Abstande der Elektronen voneinander, ist für viele Erscheinungen die Hypothese einer kontinuierlichen Verteilung gestattet.

Demgemäß schreiben wir

$$\int \mathfrak{D}\, d\mathfrak{g} = \int \operatorname{div} \mathfrak{D}\, dv = q, \tag{2}$$

und da

$$\int \varrho\, dv = q, \tag{3}$$

so ist

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho \tag{4}$$

und überall, wo keine Ladungen vorhanden sind

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = 0. \tag{4a}$$

Hierdurch ist eine Beziehung zwischen der Ladung und deren Verschiebung festgesetzt. Anderseits drückt ein direkt

der Erfahrung entnommenes Gesetz die Abhängigkeit der elektrischen Kraft von der Ladung aus. Die Ladung q, welche elektromagnetisch gemessen sei, wirkt auf eine gleichfalls elektromagnetisch gemessene Einheitsladung, welche sich in P im Abstande r von ihr im luftleeren Raume befindet, mit der Kraft

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{r}_1 \frac{qv^2}{r^2}. \tag{5}$$

v bedeutet hier die Lichtgeschwindigkeit im Äther und drückt das Verhältnis der elektromagnetischen zur elektrostatischen Einheit der Elektrizitätsmenge aus. $\mathfrak{r}_1$ ist ein Einheitsvektor, welcher die Richtung des von der Ladung nach P gezogenen Radiusvektors $\mathfrak{r}$ hat. Nach Gleichung (2) läßt sich (5) auch schreiben

$$\mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{r}_1 v^2}{r^2} \int \mathfrak{D} d\mathfrak{g}. \tag{6}$$

$d\mathfrak{g}$ ist das Element einer beliebigen Fläche, welche q einschließt. Wir beschreiben eine Kugelfläche um q als Mittelpunkt und zwar so, daß P auf der Oberfläche dieser Kugel liege. Es hat in jedem Punkte der Kugeloberfläche $\mathfrak{D}$ dieselbe Richtung wie das zu dem Punkte gehörige Flächenelement $d\mathfrak{g}$. Daher ist

$$\mathfrak{D} d\mathfrak{g} = D dg. \tag{7}$$

D ist aber auf der Fläche konstant und es folgt

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= \frac{\mathfrak{r}_1 v^2 D}{r^2} \int dg \\ &= \frac{\mathfrak{r}_1 v^2 D}{r^2} \cdot 4\pi r^2, \end{aligned} \tag{8}$$

und da $\mathfrak{D}$ die Richtung von $\mathfrak{r}_1$ hat

$$\mathfrak{E} = 4\pi v^2 \mathfrak{D}. \tag{9}$$

Diese Gleichung gilt zunächst nur für elektrostatische Erscheinungen, d. h. für ruhende Elektronen. Bevor wir zu den Kraftwirkungen übergehen, welche von sich bewegenden Elektronen ausgehen, müssen wir den Begriff einer magnetischen Kraft und eines elektrischen Stromes erörtern.

Die magnetische Kraft oder magnetische Feldintensität ist diejenige Kraft, welche das Feld auf einen an die betreffende Stelle des Raumes gebrachten positiven Einheitspol ausübt. Unter Einheitspol versteht man denjenigen Pol, welcher im Vakuum einem gleichstarken Pole im Abstande von 1 cm gegenüberstehen muß, um mit der Einheit der Kraft (1 Dyn.) abgestoßen zu werden. Ein Magnetfeld entsteht immer, wenn Elektronen sich bewegen. Die Intensität und Richtung des Magnetfeldes ist mit der Bewegung der Elektronen durch eine Differentialgleichung verknüpft. Ist nämlich ϱ die Dichte der sich bewegenden Ladung und $\mathfrak{u}$ ihre Geschwindigkeit, so besteht die Gleichung

$$\text{curl}\,\mathfrak{H} = 4\pi\varrho\,\mathfrak{u} + 4\pi\frac{d\mathfrak{D}}{dt}. \tag{10}$$

Der Ausdruck

$$\varrho\,\mathfrak{u} + \frac{d\mathfrak{D}}{dt} = \mathfrak{S} \tag{11}$$

wird der elektrische Strom genannt. Den ersten Teil bezeichnet man als Konvektionsstrom und den zweiten Teil als Verschiebungsstrom. Die Maxwellsche von Fitzgerald verbesserte Stromgleichung hat die Form

$$\mathfrak{S} = \varrho\mathfrak{u} + \frac{d\mathfrak{D}}{dt} + \mathfrak{k}.$$

$\mathfrak{k}$ bedeutet den Leitungsstrom. Da nun in der Elektronentheorie der Leitungsstrom als ein Konvektionsstrom aufgefaßt wird, so fällt $\mathfrak{k}$ fort. Nach Gleichung (10) ist der elektrische Strom immer geschlossen, denn die Divergenz eines curls ist Null. Es muß daher immer sein

$$\nabla\left(\varrho\,\mathfrak{u} + \frac{d\mathfrak{D}}{dt}\right) = 0. \tag{12}$$

Daß diese Gleichung richtig ist, werde an dem Falle der konstanten geradlinigen Bewegung einer Ladung gezeigt. Wenn eine solche Bewegung stationär geworden ist, bewegt sich das die Ladung umgebende Feld wie ein starrer Körper. Faßt man nun in einem bestimmten Zeitpunkte eine Stelle des Feldes ins Auge, so wird die zeitliche Änderung der Ver-

schiebung $\mathfrak{D}$ darin bestehen, daß am Ende des folgenden Zeitelementes dt ein Wert von $\mathfrak{D}$ an die betreffende Stelle des Feldes kommt, welcher um die Strecke udt auf der Bewegungslinie zurücklag. Beachtet man nun die vektoranalytische Bedeutung des Ausdruckes $(\mathfrak{u}\nabla)\mathfrak{D}$, so erkennt man, daß gesetzt werden kann

$$\frac{d\mathfrak{D}}{dt} = -(\mathfrak{u}\nabla)\mathfrak{D}. \tag{13}$$

Ferner ist

$$(\mathfrak{u}\nabla)\mathfrak{D} = \mathfrak{u}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{D} - \mathfrak{D}(\nabla\mathfrak{u}) - \mathrm{curl}\,\mathfrak{V}\mathfrak{u}\mathfrak{D} + (\mathfrak{D}\nabla)\mathfrak{u}. \tag{14}$$

Nach der Voraussetzung ist $\mathfrak{u}$ konstant. Ferner ist

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{D} = \varrho.$$

Daher

$$\frac{d\mathfrak{D}}{dt} = -(\mathfrak{u}\nabla)\mathfrak{D} = -\mathfrak{u}\varrho + \mathrm{curl}\,\mathfrak{V}\mathfrak{u}\mathfrak{D} \tag{14a}$$

und

$$\mathfrak{S} = \varrho\mathfrak{u} + \frac{d\mathfrak{D}}{dt} = \mathrm{curl}\,\mathfrak{V}\mathfrak{u}\mathfrak{D}. \tag{15}$$

Folglich

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{S} = \nabla\cdot\mathrm{curl}\,\mathfrak{V}\mathfrak{u}\mathfrak{D} = 0.$$

Es ist nicht ohne Interesse, darauf hinzuweisen, daß gemäß der Gleichung (10) die magnetische Kraft nicht eine Kraft sui generis ist, sondern eine Abart der elektrischen Kraft. Es ist eine Kraft, welche Elektronen vermittels des Äthers auf andere Elektronen ausüben. Bringt man einen Magneten in ein Feld von sich bewegenden Elektronen, so wirkt das Feld auf die im Magneten rotierenden Elektronen ein und erzeugt so die bekannten magnetischen Erscheinungen. Eine noch weiter gehende Vereinheitlichung würde daher unter Umgehung des Begriffes einer magnetischen Kraft alle Kraftwirkungen als elektrische auffassen.

Die magnetische Kraft ist immer solenoidal verteilt, d. h. es besteht überall die Beziehung

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{H} = 0. \tag{15a}$$

Die Berechtigung hierzu leitet sich aus der Erfahrungstatsache ab, daß es keinen isolierten Magnetpol gibt, von welchem ein

Kraftfluß divergieren könnte, daß also der magnetische Fluß immer in geschlossenen unverzweigten Linien stattfindet. Die Maxwellsche Theorie kennt außer der magnetischen Kraft $\mathfrak{H}$ die durch sie erzeugte magnetische Induktion $\mathfrak{B}$. Indem sie an letztere die Bedingung einer solenoidalen Verteilung knüpft und die Beziehung festsetzt

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H},$$

folgert sie, daß die magnetische Kraft überall Divergenzstellen hat, wo μ die Permeabilität variiert:

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0 = \mu \nabla \mathfrak{H} + \mathfrak{H} \nabla \mu.$$

Die magnetische Kraft spielt daher in gewisser Beziehung in der Elektronentheorie des kleinen Maßstabes die Rolle der magnetischen Induktion. Dies erhellt auch aus der Gleichung, welche das Auftreten einer elektrischen Kraft mit der an derselben Stelle des Raumes stattfindenden Änderung der magnetischen Kraft in Beziehung setzt:

$$(16) \qquad -4\pi v^2 \operatorname{curl} \mathfrak{D} = \frac{d\mathfrak{H}}{dt}.$$

Die magnetische Induktion, welche bei Vergrößerung unseres Maßstabes auftritt, ist eine Hilfsvariable. Man erkennt, daß die Verschiebung nur dann wirbelartig verteilt ist, wenn das Magnetfeld zeitlich variiert. Diese Variation kann davon herrühren, daß ein Magnetfeld bewegt wird, daß Leitungsströme an Intensität abnehmen oder zunehmen, ganz allgemein davon, daß Elektronen oder einzelne Ladungen sich bewegen. Das Kraftfeld, welches die Ladungen umgibt, ist dann nicht mehr als Potentialfunktion darstellbar, wie dies bei rein elektrostatischen Problemen der Fall ist.

Anmerkung. Die obige Gleichung, welche das Auftreten einer elektrischen Induktionskraft an die zeitliche Variation der magnetischen Kraft knüpft, umfaßt nicht alle Fälle einer möglichen Induktion.

Allgemeiner und das eigentliche Wesen der sogenannten Magnetoinduktion erschöpfender darstellend ist das Gesetz, daß

die elektrische Induktionskraft immer dann erzeugt wird, wenn Materie sich in einem magnetischen Felde bewegt. Bei geradliniger Bewegung ist die erzeugte Kraft z. B.

$$\mathfrak{E} = V\mathfrak{H}\mathfrak{u}.$$

Aus dieser Gleichung läßt sich dann allerdings leicht ableiten, daß das Linienintegral der elektrischen Kraft über einen starren Stromkreis numerisch gleich ist der Änderung des eingeschlossenen Kraftflusses in der Zeiteinheit.

§ 2.

Die elektrodynamischen Kräfte.

Die Gleichungen (10) und (16) und die Bedingung der solenoidalen Verteilung von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{D}$ im reinen Äther genügen bei vorgeschriebener Elektronenbewegung zur eindeutigen Bestimmung der magnetischen Kraft und der dielektrischen Verschiebung, wenn diese Vektorgrößen für $t = 0$ gegeben sind und außerdem ihre Werte im Unendlichen verschwinden.

Die Gleichung

$$-4\pi v^2 \operatorname{curl} \mathfrak{D} = \frac{d\mathfrak{H}}{dt} \tag{16}$$

läßt sich für den Fall der gleichförmigen Bewegung einer Ladung leicht integrieren.

Ist die Bewegung stationär geworden, so bewegt sich das die Ladung umgebende magnetische und elektrische Feld wie ein starrer Körper, wie bereits bei Ableitung von Gleichung (15) bemerkt wurde. Stellt man ganz analoge Betrachtungen an, so erkennt man, daß für die zeitliche Änderung der magnetischen Kraft sich setzen läßt

$$\frac{d\mathfrak{H}}{dt} = \operatorname{curl} V\mathfrak{u}\mathfrak{H}.$$

Dadurch nimmt (16) die Form an

$$4\pi v^2 \operatorname{curl} \mathfrak{D} = \operatorname{curl} V\mathfrak{H}\mathfrak{u}, \tag{17}$$

daher

$$4\pi v^2 \mathfrak{D} = V\mathfrak{H}\mathfrak{u} + \mathfrak{F}, \tag{18}$$

wo $\mathfrak{F}$ eine Integrationskonstante bedeutet, deren curl Null ist. Ein solcher Vektor ist von einem Potential ableitbar, so daß man auch schreiben kann

$$4\pi v^2 \mathfrak{D} + V\mathfrak{u}\mathfrak{H} = -\nabla\varphi. \tag{19}$$

Nun drängt sich die Frage auf, welche physikalische Bedeutung ist dem Vektor $\mathfrak{F}$ beizulegen. Diese Frage ist dahin zu beantworten, daß $\mathfrak{F}$ diejenige mechanische Kraft ist, welche im Felde der sich bewegenden Ladung eine sich mitbewegende Einheitsladung erfährt. Um dies zu zeigen, betrachten wir beide Komponenten von $\mathfrak{F}$ gesondert:

$$\mathfrak{F} = 4\pi v^2 \mathfrak{D} + V\mathfrak{u}\mathfrak{H}. \tag{20}$$

Der erste Term ist nach den vorhergehenden Erörterungen die rein elektrische Kraft, welche auf die im Äther ruhende Einheitsladung ausgeübt wird. Nach den Voraussetzungen der Elektronentheorie wird eine solche Kraft ausgeübt, unabhängig davon, ob die Verschiebung $\mathfrak{D}$ von ruhenden Elektronen oder sich bewegenden herrührt.

In dem betrachteten Falle rührt $\mathfrak{D}$ sowohl von der sich bewegenden Ladung als auch von einem etwa vorhandenen ruhenden Felde her. Ähnlich verhält es sich mit dem magnetischen Felde. Da die Bewegung der Ladung einen Strom darstellt, so begleitet die Ladung ein magnetisches Feld. Diesem kann ein von äußeren Ursachen herrührendes superponiert sein.

Die begleitende mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ sich bewegende Einheitsladung konstituiert einen elektrischen Strom, welcher aus zwei Teilen besteht. Der erste Teil hat seinen Sitz in der geladenen Materie. Es ist der Konvektionsstrom und hat den Wert $\mathfrak{u}$ (Produkt aus Ladung und Geschwindigkeit). Der andere Teil ist ein Verschiebungsstrom und besteht aus der zeitlichen Änderung der die Ladung umgebenden Verschiebung im Äther: $\frac{d\mathfrak{D}}{dt}$.

Die Erfahrung lehrt nun bekanntlich, daß ein Magnetfeld $\mathfrak{H}$ auf die stromführende Materie eine mechanische Kraft ausübt

$$V\mathfrak{c}\mathfrak{H},$$

wenn der Strom mit $\mathfrak{c}$ bezeichnet wird. Auf den materiellen Träger der Einheitsladung oder kurz auf die Einheitsladung wird daher die Kraft

$$V\mathfrak{u}\mathfrak{H}$$

ausgeübt.

Man erkennt, daß $\mathfrak{F}$ die auf die Materie ausgeübte Kraft richtig darstellt. — Natürlich erstreckt sich die vom Magnetfelde auf den elektrischen Strom ausgeübte Kraft auch auf den im freien Äther befindlichen Verschiebungsstrom. Falls daher elastische Kräfte sich nicht widersetzten, würde der Äther selbst in Bewegung geraten (siehe weiter unten).

Es sei noch auf eine Eigentümlichkeit der Kraft $\mathfrak{F}$ hingewiesen. Ein Beobachter, welcher an der translatorischen Bewegung eines geladenen Körpers teilnimmt — wie z. B. ein Beobachter auf unserem Planeten —, würde mit hinreichend feinen Meßinstrumenten in der Umgebung der Ladung Divergenzstellen von $\mathfrak{F}$ entdecken. D. h. wenn eine Einheitsladung an verschiedene Stellen dieses Raumes gebracht würde, so müßte sie Kraftwirkungen erfahren, als ob elektrische Massen daselbst verteilt wären. Denn es ist

$$\operatorname{div}\mathfrak{F} = 4\pi v^2 \nabla\mathfrak{D} + \nabla V\mathfrak{u}\mathfrak{H}. \tag{21}$$

Nun ist in dem betrachteten Raume

$$\nabla\mathfrak{D} = 0,$$

folglich

$$\operatorname{div}\mathfrak{F} = \mathfrak{H}\operatorname{curl}\mathfrak{u} - \mathfrak{u}\operatorname{curl}\mathfrak{H}.$$

Da $\mathfrak{u}$ konstant, so wird

$$\nabla\mathfrak{F} = -\mathfrak{u}\operatorname{curl}\mathfrak{H}. \tag{23}$$

Diese Divergenzstellen werden also überall im Äther auftreten, wo $\mathfrak{H}$ wirbelartig verteilt ist, d. h. wo die Verschiebung zeitlich variiert. Wäre man geneigt, ein solches Verhalten

der Umgebung einer bewegten Ladung für unwahrscheinlich zu halten und demgemäß die Gleichung für $\mathfrak{F}$ entsprechend zu ändern, so würde man zu sehr komplizierten Ausdrücken gelangen, wenn man die Bedingung aufrechterhalten wollte, daß die Verschiebung im Äther unter allen Umständen solenoidal sein muß.

Spannungen im Äther.

Im Einklang mit der Ableitung bedeutet $\mathfrak{F}$ die Kraft, welche vom Äther auf die Materie, d. h. die in der Materie vorhandenen Elektronen ausgeübt wird, und zwar diejenige Kraft, die auf die Einheit der Ladung an der betreffenden Stelle der Materie wirkt. Will man daher die gesamte ponderomotorische Kraft, welche auf einen starren Körper wirkt, berechnen, so muß man die von sämtlichen Volumenelementen $d\tau$ herrührenden Kräfte summieren. Dann ist die am Schwerpunkte des starren Körpers angreifende Kraft

$$\mathfrak{G} = \int \mathfrak{F} \varrho \, d\tau. \tag{24}$$

Also

$$\mathfrak{G} = 4\pi v^2 \int \mathfrak{D}(\nabla \mathfrak{D}) \, d\tau + \int \mathrm{V}(\varrho \mathfrak{u}) \mathfrak{H} \, d\tau. \tag{25}$$

Nun ist nach Gleichung (10):

$$\varrho \mathfrak{u} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{curl} \mathfrak{H} - \frac{d\mathfrak{D}}{dt}. \tag{26}$$

Daher

$$\mathfrak{G} = 4\pi v^2 \int \mathfrak{D}(\nabla \mathfrak{D}) \, d\tau + \frac{1}{4\pi} \int \mathrm{V} \operatorname{curl} \mathfrak{H} \mathfrak{H} \, d\tau - \int \mathrm{V} \frac{d\mathfrak{D}}{dt} \mathfrak{H} \, d\tau. \tag{27}$$

Nun ist nach Anhang Gleichung (26), wenn $d\mathfrak{g}$ das Element einer beliebigen die Materie einschließenden Fläche bedeutet:

$$\int \mathfrak{D}(\nabla \mathfrak{D}) \, d\tau = \int \mathfrak{D} (\mathfrak{D} \, d\mathfrak{g}) - \int (\mathfrak{D} \nabla) \mathfrak{D} \, d\tau.$$

Im letzten Term in diesem Ausdrucke läßt sich auch nach Anhang Gleichung (21) setzen:

$$(\mathfrak{D}\nabla)\mathfrak{D} = -\mathrm{V}\,\mathfrak{D}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{D} + \tfrac{1}{2}\nabla\mathfrak{D}^2.$$

Dadurch wird

$$(28)\qquad \int \mathfrak{D}(\nabla\mathfrak{D})\,d\tau = \int \mathrm{V}\,\mathfrak{D}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{D}\,d\tau + \int \mathfrak{D}(\mathfrak{D}\,d\mathfrak{g}) - \tfrac{1}{2}\int \nabla\mathfrak{D}^2\,d\tau.$$

Man erhält für $\mathfrak{G}$ durch Einsetzen von (28):

$$(29)\qquad \mathfrak{G} = 4\pi v^2 \int \left[\mathrm{V}\,\mathfrak{D}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{D}\,d\tau + \mathfrak{D}(\mathfrak{D}\,d\mathfrak{g}) - \tfrac{1}{2}\mathrm{V}\,\mathfrak{D}^2\,d\tau\right] + \tfrac{1}{4\pi}\int \mathrm{V}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{H}\,\mathfrak{H}\,d\tau - \int \mathrm{V}\,\frac{d\mathfrak{D}}{dt}\,\mathfrak{H}\,d\tau.$$

Beachtet man ferner, daß ganz analog Gleichung (28) unter Berücksichtigung von $\nabla\mathfrak{H} = 0$

$$\tfrac{1}{4\pi}\int \mathrm{V}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{H}\,\mathfrak{H}\,d\tau = \tfrac{1}{4\pi}\int \left[\mathfrak{H}(\mathfrak{H}\,d\mathfrak{g}) - \tfrac{1}{2}\nabla\mathfrak{H}^2\,d\tau\right]$$

und daß

$$4\pi v^2\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{D} = -\frac{d\mathfrak{H}}{dt},$$

so läßt sich auch schreiben für die am Schwerpunkte des Körpers angreifende Kraft

$$(30)\qquad \mathfrak{G} = 2\pi v^2 \int [2\mathfrak{D}(\mathfrak{D}\,d\mathfrak{g}) - \mathfrak{D}^2\,d\mathfrak{g}] + \tfrac{1}{8\pi}\int [2\mathfrak{H}(\mathfrak{H}\,d\mathfrak{g}) - \mathfrak{H}^2\,d\mathfrak{g}] + \tfrac{d}{dt}\int \mathrm{V}\,\mathfrak{H}\mathfrak{D}\,d\tau.$$

Hierbei wurde noch von dem Gaußschen Satze [Anhang Gleichung (24)]

$$\int \nabla\mathfrak{H}^2\,d\tau = \int \mathfrak{H}^2\,d\mathfrak{g}$$

Gebrauch gemacht.

In bekannter Weise leitet man aus Gleichung (30) noch das Kraftmoment $\mathfrak{R}$ ab, indem man vektoriell mit dem Radius-

vektor $\mathfrak{r}$, den man vom Momentenpunkte aus zieht, multipliziert. Man erhält dann

$$(30a)\quad \mathfrak{K} = V\mathfrak{r}\mathfrak{G} = 2\pi v^2 \int \left[2V\mathfrak{r}\mathfrak{D}(\mathfrak{D}\,d\mathfrak{g}) - \mathfrak{D}^2 V\mathfrak{r}\,d\mathfrak{g}\right] + \frac{1}{8\pi}\int \left[2V\mathfrak{r}\mathfrak{H}(\mathfrak{H}\,d\mathfrak{g}) - \mathfrak{H}^2 V\mathfrak{r}\,d\mathfrak{g}\right] + \frac{d}{dt}\int V\mathfrak{r}V\mathfrak{H}\mathfrak{D}\,d\tau.$$

Auch findet man leicht die Arbeitsleistung W dieser Kraft:

$$(30b)\quad W = \int \mathfrak{G}\,d\mathfrak{r} = 2\pi v^2 \iint [2\mathfrak{D}\,d\mathfrak{r}(\mathfrak{D}\,d\mathfrak{g}) - \mathfrak{D}^2\,d\mathfrak{g}\,d\mathfrak{r}] + \frac{1}{8\pi}\iint [2\mathfrak{H}\,d\mathfrak{r}(\mathfrak{H}\,d\mathfrak{g}) - \mathfrak{H}^2\,d\mathfrak{g}\,d\mathfrak{r}] + \frac{d}{dt}\iint V\mathfrak{H}\mathfrak{D}\,d\mathfrak{r}\,d\tau.$$

An Gleichung (30) lassen sich wichtige Bemerkungen anknüpfen. Die Gleichung besagt zunächst, daß Materie, welche eine räumliche Verteilung von Elektrizität besitzt, in einem elektromagnetischen Felde eine Kraftwirkung erfährt, welche darstellbar ist durch die Summe von zwei Kräften. Die eine von diesen ist die an den Elementen einer den Körper beliebig umschließenden Fläche angreifende Kraft und die zweite ist eine an den Volumenelementen des von der Fläche begrenzten Raumes angreifende Kraft. Letztere Kraft verschwindet in einem stationär gewordenen System. Die in einem solchen Systeme wirkenden ponderomotorischen Kräfte sind darstellbar durch das Oberflächenintegral über eine im Äther beliebig konstruierte, den Körper einschließende Fläche. Nach Analogie der in der Elastizitätslehre üblichen Überlegungen könnte man nun die ponderomotorische Wirkung, welche auf die Materie ausgeübt wird, zurückführen auf Ätherspannungen, und es ließe sich zeigen, daß sich dieselben Spannungen ergeben, wie die Maxwellsche Theorie sie ableitet. Es sei darauf hingewiesen, daß die erwähnte Analogie der Ätherspannungen mit elastischen Spannungen nur eine beschränkte ist. Doch soll hierauf nicht weiter eingegangen

werden. — Der Begriff der Spannung setzt ein Sichimgleichgewichthalten von Kräften voraus und damit die Gültigkeit des dritten Newtonschen Gesetzes.

Grenzt man einen Raum ab, welcher keine Materie enthält, dann ist $\mathfrak{G}$ in Gleichung (30) Null und es wird

$$(31) \qquad 2\pi v^2 \int [2\mathfrak{D}(\mathfrak{D}\,dg)] + \frac{1}{8\pi}\int [2\mathfrak{H}(\mathfrak{H}\,dg) - \mathfrak{H}^2\,dg] = -\frac{d}{dt}\int V\mathfrak{H}\mathfrak{D}\,d\tau.$$

Die Deutung dieser Beziehung ist folgende: Grenzt man einen Ätherteil ab, in welchem der Vektor

$$V\mathfrak{H}\mathfrak{D}$$

zeitlich variiert, so wirkt auf die Begrenzungsfläche eine Kraft, welche durch die linke Seite der Gleichung (31) bestimmt ist und welcher eine gleich große entgegengesetzt gerichtete, an den Volumenelementen des Äthers angreifende Kraft

$$\frac{d}{dt}\int V\mathfrak{H}\mathfrak{D}\,d\tau$$

das Gleichgewicht hält. Diese Deutung setzt die Gültigkeit des Gesetzes der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung voraus, wie das eben selbstverständlich ist, wenn man von Ätherspannungen redet.

Die Schwierigkeiten, welche sich ergeben, wenn man jene Voraussetzung nicht macht, liegen auf der Hand. Gleichung (31) würde dann besagen, daß an der Begrenzungsfläche des betrachteten Ätherteiles Kräfte wirken, welche den Äther selbst in Bewegung versetzen würden. Da aber die absolute Ruhe des Äthers die Grundannahme der Elektronentheorie ist, so läge hier ein Widerspruch vor. Man käme so zu der Folgerung, daß zwar der Äther auf die Materie ponderomotorische Kräfte ausüben könnte, aber die an dem Äther angreifenden ponderomotorischen Kräfte keine Wirkung hervorrufen könnten, was dem dritten Newtonschen Gesetze widerspräche.

Kehren wir nunmehr zu Gleichung (30) zurück. Die Oberflächenintegrale dieser Gleichung beziehen sich, wie er-

wähnt, auf eine beliebige Fläche, welche die Materie einschließt. Wir betrachten zwei Grenzfälle. Erstens lassen wir die Fläche an den Körper heranrücken, bis sie mit der Begrenzungsfläche zusammenfällt. Dann fragen wir uns, ob das Volumenintegral, welches sich nunmehr auf die Elemente des Körpers selbst erstreckt, verschwindet. Ohne Zweifel gibt es viele Fälle, wo in der Materie $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{D}$ vorhanden sind und dabei zeitlich variieren. Dann würde das Integral $\frac{d}{dt}\int \mathrm{V}\mathfrak{H}\mathfrak{D}\,d\tau$ nicht verschwinden. — Bei der translatorischen Bewegung geladener Leiter und in vielen anderen Fällen verschwindet, wie wir sehen werden, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{D}$ im Innern der Materie. Dann ist die Kraft $\mathfrak{G}$ darstellbar durch das auf die Oberfläche des Körpers erstreckte Integral

$$\mathfrak{G}_0 = 2\pi v^2 \int [2\mathfrak{D}(\mathfrak{D}\,d\mathfrak{g}) - \mathfrak{D}^2 d\mathfrak{g}] + \int [2\mathfrak{H}(\mathfrak{H}\,d\mathfrak{g}) - \mathfrak{H}^2 d\mathfrak{g}]. \tag{30c}$$

Zweitens lassen wir die Fläche, welche die Materie des Systems einschließt, ins Unendliche rücken.

Dann verschwinden die Flächenintegrale in Gleichung (30) und die Gesamtkraft ist dann darstellbar durch ein über den ganzen unendlichen Raum erstrecktes Integral

$$\mathfrak{G} = \frac{d}{dt}\int \mathrm{V}\mathfrak{H}\mathfrak{D}\,d\tau. \tag{30d}$$

Diese Gleichung ist von hervorragender Wichtigkeit. Wir müssen nämlich auf Grund des dritten Newtonschen Gesetzes schließen, daß, wenn eine ponderomotorische Gesamtkraft, wie sie durch Gleichung (30d) dargestellt wird, vom Äther auf die Materie ausgeübt wird, dann eine äußere auf die Materie, d. h. auf die in der Materie vorhandenen Elektronen wirkende Kraft denselben Wert mit entgegengesetztem Vorzeichen haben muß. Es wirkt daher auf die Materie im Falle des Gleichgewichts eine äußere Kraft

$$-\mathfrak{G} = \frac{d}{dt}\int \mathrm{V}\mathfrak{D}\mathfrak{H}\,d\tau. \tag{30e}$$

Offenbar hat der Vektor $V\mathfrak{D}\mathfrak{H}$ den Charakter einer Bewegungsgröße. Bezeichnen wir diese mit $\mathfrak{M}$, so ist pro Volumeneinheit

$$\frac{d\mathfrak{M}}{dt} = \frac{d}{dt} V\mathfrak{D}\mathfrak{H}. \tag{30f}$$

Der erste, welcher unter Hinweis auf die Gültigkeit des Prinzips der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung die Kraft

$$\frac{d}{dt} V\mathfrak{D}\mathfrak{H}$$

ableitete, ist Oliver Heaviside.[1])

Der Satz von der Erhaltung der Energie.

Die Grundgleichungen enthalten Hypothesen, deren Konsequenzen mit dem Energieprinzip im Einklang sein müssen. Daß letzteres wirklich der Fall ist, läßt sich wie folgt zeigen.

Wir betrachten ein isoliertes System, in welchem die Elektronen eine beliebige Verteilung und beliebige geradlinige Bewegungen haben mögen. Dieses System sei von einer beliebigen Fläche umschlossen. Die kinetische Energie der eingeschlossenen Materie sei L. Bei der Abwesenheit von rein mechanischen Kräften erhalte L einen Zuwachs, welcher allein durch die von den Elektronen ausgehenden Kräfte bedingt ist, d. h. durch die vom Äther auf die ponderable Materie ausgeübten Kräfte.

Diese lassen sich durch eine Gesamtkraft $\mathfrak{G}$ darstellen, wie wir im vorigen Abschnitte gesehen haben. Die Arbeit, welche $\mathfrak{G}$ in dem Zeitelemente dt leistet, ist, da der Antriebspunkt in dieser Zeit den Weg $\mathfrak{u}\,dt$ zurücklegt,

$$dL = \mathfrak{G}\mathfrak{u}\,dt.$$

Ein Blick auf Gleichung (25) zeigt, daß der zweite Teil der Kraft $\mathfrak{G}$ nichts zu der Arbeit des Äthers an der Materie beitragen kann, denn er steht senkrecht zur Bewegungsrichtung.

1) O. Heaviside, London Electrician 1886 und Electr. Papers vol. II, p. 560, 509 usf.

Daher ist

$$dL = 4\pi v^2\, dt \int \varrho\,(\mathfrak{D}\mathfrak{u})\, d\tau. \tag{33}$$

Dieser Ausdruck läßt sich umgestalten.

Zunächst betrachten wir das Rechengesetz [Anhang Gleichung (17a)]

$$\operatorname{div} V\mathfrak{D}\mathfrak{H} = \mathfrak{H} \operatorname{curl} \mathfrak{D} - \mathfrak{D} \operatorname{curl} \mathfrak{H}.$$

Es folgt unter gleichzeitiger Anwendung des Gaußschen Satzes auf die linke Seite

$$v^2\, dt \int V\mathfrak{D}\mathfrak{H}\, d\mathfrak{g} = v^2\, dt \int \mathfrak{H} \operatorname{curl} \mathfrak{D} d\tau - v^2\, dt \int \mathfrak{D} \operatorname{curl} \mathfrak{H}\, d\tau.$$

In dieser Gleichung ersetzen wir $\operatorname{curl} \mathfrak{D}$ und $\operatorname{curl} \mathfrak{H}$, indem

$$\operatorname{curl} \mathfrak{D} = -\frac{1}{4\pi v^2} \frac{d\mathfrak{H}}{dt},$$

$$\operatorname{curl} \mathfrak{H} = 4\pi \frac{d\mathfrak{D}}{dt} + 4\pi \varrho \mathfrak{u}$$

und erhalten

$$v^2\, dt \int V\mathfrak{D}\mathfrak{H}\, d\mathfrak{g} = -\frac{dt}{4\pi} \int \mathfrak{H} \frac{d\mathfrak{H}}{dt} d\tau - 4\pi v^2\, dt \int \mathfrak{D} \frac{d\mathfrak{D}}{dt} d\tau - 4\pi v^2\, dt \int \varrho\,(\mathfrak{D}\mathfrak{u})\, d\tau. \tag{35}$$

Man erkennt sofort, daß der letzte Term der rechten Seite mit der rechten Seite von Gleichung (33) übereinstimmt. Man kann daher schreiben

$$dL = -\frac{1}{8\pi} d \int \mathfrak{H}^2 d\tau - 2\pi v^2 d \int \mathfrak{D}^2 d\tau - v^2\, dt \int V\mathfrak{D}\mathfrak{H}\, d\mathfrak{g}. \tag{36}$$

Mit besonderem Hinblick auf das Energieprinzip wird diese Gleichung in folgender Weise gedeutet. Es besteht in dem betrachteten Raume eine räumliche Verteilung von magnetischer und elektrischer Energie, welche pro Volumeneinheit beträgt

$$\frac{1}{8\pi} \mathfrak{H}^2 + 2\pi v^2 \mathfrak{D}^2 = U. \tag{37}$$

Die Abnahme dieser Energie ist, wenn die Gesamtenergie konstant bleiben soll, gleich der Zunahme der gewöhnlichen

kinetischen Energie L des Systems plus der durch die Begrenzungsfläche nach außen gewanderten Energie. Letzterer Betrag ist pro Zeiteinheit und pro Einheit der senkrecht zur Energieströmung konstruierten Fläche der Absolutwert von

$$v^2 \mathrm{V} \mathfrak{D} \mathfrak{H}.$$

Dieser Vektor wird der Poyntingsche Vektor genannt. Bei Strahlungserscheinungen gibt er Richtung und Intensität der Strahlung an. Er hat den Charakter einer Bewegungsgröße, wie schon aus Gleichung (30) hervorging, wo seine zeitliche Variation eine Kraft darstellt.

§ 3.

Das Kraftfeld und die Energie bewegter Ladungen.

Im vorangehenden Abschnitt ist hauptsächlich die an der Materie angreifende Kraft $\mathfrak{F}$ erörtert worden. Dieser Vektor erschien unmittelbar als Integrationskonstante der Differentialgleichung

$$\mathrm{curl}\, \mathfrak{D} = -\frac{1}{4\pi v^2} \frac{d\mathfrak{H}}{dt}.$$

Um die elektromagnetische Energie, welche nach Gleichung (37) im Raume verteilt ist, zu berechnen, müssen nun $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{H}$ einzeln bestimmbar sein. Wir müssen noch die zweite Differentialgleichung

$$\mathrm{curl}\, \mathfrak{H} = 4\pi \frac{d\mathfrak{D}}{dt} + 4\pi \varrho \mathfrak{u}$$

hinzuziehen, dieselbe integrieren und dann die Konstanten des Gleichungssystems aus den Daten eines hinreichend umschriebenen speziellen Falles bestimmen.

Die Bewegungsformen der Elektronen, welche zu erörtern wären, sind die gleichförmige translatorische, die rotatorische und die Schwingungsbewegung.

Man verdankt O. Heaviside, J. J. Thomson und G. F. C. Searle die ersten wichtigen Untersuchungen über die Bewegungen von Ladungen. Searle hat in erschöpfender, sorgfältiger Weise die Bewegung eines geladenen Ellipsoids behandelt.

Die translatorische Bewegung von geladenen Körpern.

Die magnetischen und elektrischen Kräfte.

Ein geladener Körper bewege sich mit gleichförmiger geradliniger Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$. Alle andere Materie sei weit entfernt. Wir stellen uns die Aufgabe, die magnetische Kraft und die elektrische Verschiebung in dem die Ladung umgebenden Felde zu bestimmen und die Energie des Systems zu berechnen. — Wir kehren zunächst zu einer Betrachtung der Bestimmungsgleichungen zurück.

Die Differentialgleichung

$$\operatorname{curl}\mathfrak{H} = 4\pi\frac{d\mathfrak{D}}{dt} + 4\pi\varrho\mathfrak{u}$$

läßt sich durch Einsetzen des Wertes von $\frac{d\mathfrak{D}}{dt}$ aus Gleichung (14a), welch letztere Gleichung für $\mathfrak{u} = konst.$ abgeleitet war, auch schreiben

$$\operatorname{curl}\mathfrak{H} = 4\pi\operatorname{curl}\mathrm{V}\mathfrak{u}\mathfrak{D}$$

und integriert

$$\mathfrak{H} = 4\pi\mathrm{V}\mathfrak{u}\mathfrak{D} + \mathfrak{N}, \tag{38}$$

wo $\mathfrak{N}$ eine vektorielle Integrationskonstante bedeutet, deren curl Null ist. $\mathfrak{N}$ ist also von einem Potentiale ableitbar. Wollte man nun für einen gegebenen konkreten Fall aus Gleichung (38) und aus der Gleichung (18):

$$4\pi v^2\mathfrak{D} = \mathrm{V}\mathfrak{H}\mathfrak{u} + \mathfrak{F}$$

$\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{H}$ bestimmen, so würde man doch auf erhebliche Schwierigkeiten stoßen. Man hat, um die Lösung des Problems zu erleichtern, ohne weitergehende Begründung willkürlich $\mathfrak{N}$ gleich Null gesetzt. Mir scheint es richtiger, wie folgt zu verfahren. Wir führen die Hypothese ein, daß bei der geradlinigen Bewegung einer Ladung die magnetische Kraft senkrecht zur Bewegungsrichtung steht und zeigen dann, daß eine Folge dieser Annahme das Verschwinden von $\mathfrak{N}$ ist.

Da $\mathfrak{H}$ solenoidal verteilt ist, so liefert Gleichung (38)

$$\nabla\mathfrak{H} = 4\pi\mathfrak{D}\operatorname{curl}\mathfrak{u} - 4\pi\mathfrak{u}\cdot\operatorname{curl}\mathfrak{D} + \nabla\mathfrak{N} = 0.$$

Hieraus folgt, da u konstant ist:

$$\nabla \mathfrak{N} = 4\pi \mathfrak{u} \cdot \operatorname{curl} \mathfrak{D}.$$

Wir setzen aus Gleichung (17) den Wert von $\operatorname{curl} \mathfrak{D}$ ein und erhalten

$$\nabla \mathfrak{N} = \frac{\mathfrak{u}}{v^2} \operatorname{curl} V \mathfrak{H} \mathfrak{u}.$$

Es ist aber nach Anhang Gleichung (20)

$$\operatorname{curl} V \mathfrak{H} \mathfrak{u} = \nabla_{\mathfrak{H}} (\mathfrak{H} \mathfrak{u}) + V \mathfrak{u} \operatorname{curl} \mathfrak{H}.$$

$\mathfrak{H}\mathfrak{u}$ ist aber Null, weil gemäß unserer Hypothese $\mathfrak{H}$ senkrecht zu $\mathfrak{u}$.

Daher kann gesetzt werden

$$\nabla \mathfrak{N} = \frac{\mathfrak{u}}{v^2} V \mathfrak{u} \operatorname{curl} \mathfrak{H}.$$

Die rechte Seite verschwindet, weil $\mathfrak{u}$ senkrecht zu $V \mathfrak{u} \operatorname{curl} \mathfrak{H}$.

Zur Bestimmung von $\mathfrak{N}$ haben wir daher die Gleichungen

$$\nabla \mathfrak{N} = \operatorname{curl} \mathfrak{N} = 0.$$

$\mathfrak{N}$ ist null weil $\nabla \mathfrak{N} = \operatorname{curl} \mathfrak{N} = 0$.

Offenbar kann ein Vektor, dessen Divergenz und curl überall Null ist, nur eine Konstante sein oder er muß Null sein. Eine Konstante kann $\mathfrak{N}$ nicht sein, weil dann bei Bildung des Ausdrucks für die magnetische Energie ein unendlich großer Betrag erhalten würde. [Siehe Gleichungen (37) und (38).] $\mathfrak{N}$ ist also Null unter den angegebenen Voraussetzungen.

Es ist wichtig, darauf hinzuweisen, daß $\mathfrak{N}$ im allgemeinen nicht verschwindet (Rotationen). $\mathfrak{N}$ spielt in bezug auf die magnetische Kraft dieselbe Rolle wie $\mathfrak{F}$ in bezug auf die elektrische. Es ist nämlich die magnetische Kraft, welche ein an der Bewegung eines elektromagnetischen Systems teilnehmender Beobachter wahrnimmt. Die Wirkung, welche auf einen an der Bewegung des Systems teilnehmenden magnetischen Einheitspol ausgeübt wird, setzt sich, wie die Formel

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{H} + 4\pi V \mathfrak{D} \mathfrak{u} \tag{39a}$$

besagt, aus zwei Teilen zusammen. Der erste Teil ist die Kraft, welche auf einen ruhenden Einheitspol ausgeübt wird. Der zweite Teil gibt die Zusatzkraft an, welche von der Bewegung

des Magneten im Verschiebungsfelde herrührt. Wenn auch der letztere Anteil wegen der Kleinheit experimentell nicht nachgewiesen ist, so müssen wir doch aus der Analogie mit den elektrischen Erscheinungen auf seine Existenz schließen. (Vgl. die Ableitung von $\mathfrak{F}$.) Wir können aber das Unbefriedigende, welches immerhin mit dem Stützen auf Analogien verbunden ist, vermeiden, wenn wir als Hypothese einführen, daß auf einen magnetischen Einheitspol, welcher mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ in einem elektrischen Felde bewegt wird, eine Kraft ausgeübt wird von dem Betrage $4\pi V\mathfrak{D}\mathfrak{u}$.

Wir kehren nunmehr zum Probleme der rein translatorischen Bewegung einer Ladung zurück. Nach dem oben Bemerkten haben wir für die Bewegung der Ladung die Feldgleichungen

$$4\pi v^2\mathfrak{D} + V\mathfrak{u}\mathfrak{H} = -\nabla V = \mathfrak{F}, \tag{40}$$

$$\mathfrak{H} = 4\pi V\mathfrak{u}\mathfrak{D}. \tag{41}$$

Substituiert man den Wert von $\mathfrak{H}$ aus Gleichung (41) in Gleichung (40), so ergibt sich

$$4\pi v^2\mathfrak{D} + 4\pi V\mathfrak{u}V\mathfrak{u}\mathfrak{D} = -\nabla V. \tag{42}$$

Nach Anhang Gleichung (5) ist

$$V\mathfrak{u}V\mathfrak{u}\mathfrak{D} = \mathfrak{u}\cdot(\mathfrak{u}\mathfrak{D}) - \mathfrak{u}^2\mathfrak{D}.$$

Dadurch geht Gleichung (42) über in

$$4\pi v^2\mathfrak{D} + 4\pi\mathfrak{u}(\mathfrak{u}\mathfrak{D}) - 4\pi u^2\mathfrak{D} = -\nabla V = \mathfrak{F}.$$

Ohne die Allgemeinheit des Problems einzuschränken, können wir annehmen, die Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ sei die i-Richtung, welche mit der Richtung der zunehmenden x eines an der Bewegung der Ladung teilnehmenden Koordinatensystems übereinstimme. Es wird dann $\mathfrak{u}$ gleich $u\mathfrak{i}$ und die Gleichung nimmt folgende Form an:

$$4\pi v^2\mathfrak{D} + 4\pi\mathfrak{i}u^2D_1 - 4\pi u^2\mathfrak{D} = -\nabla V \tag{42a}$$

oder

$$4\pi\left(1-\frac{u^2}{v^2}\right)\mathfrak{D} + 4\pi\frac{u^2}{v^2}\mathfrak{i}D_1 = -\frac{1}{v^2}\nabla V.$$

Da der Ausdruck $1 - \frac{u^2}{v^2}$ immer wiederkehrt, setzen wir

$$1 - \frac{u^2}{v^2} = s. \tag{43}$$

Die Absolutwerte der Komponenten von $\mathfrak{D}$ in den $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$-Richtungen nehmen dann die folgenden Werte an

$$\begin{cases} D_1 = -\frac{1}{4\pi v^2}\frac{\partial V}{\partial x}, \\ D_2 = -\frac{1}{4\pi v^2 s}\frac{\partial V}{\partial y}, \\ D_3 = -\frac{1}{4\pi v^2 s}\frac{\partial V}{\partial z}. \end{cases} \tag{44}$$

Da $\mathfrak{D}$ solenoidal verteilt ist, so muß die Beziehung bestehen

$$\frac{\partial D_1}{\partial x} + \frac{\partial D_2}{\partial y} + \frac{\partial D_3}{\partial z} = 0,$$

oder gemäß Gleichung (44)

$$s\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \tag{45}$$

Es ist von Wichtigkeit, darauf hinzuweisen, daß diese Gleichung zusammen mit den Parametern des sich bewegenden Systems dazu dient, die Funktion V und damit gemäß den Gleichungen (44) die Verschiebung eindeutig zu bestimmen. Dann ist auch die magnetische Kraft bekannt.

Man findet nämlich leicht $\mathfrak{H}$, wenn man in die Gleichung

$$\mathfrak{H} = 4\pi V \mathfrak{u} \mathfrak{D} \tag{45a}$$

die Komponenten von $\mathfrak{D}$ aus Gleichung (44) einsetzt.

Zunächst ist, da $u_2 = u_3 = 0$:

$$4\pi V \mathfrak{u} \mathfrak{D} = -\mathfrak{j} 4\pi u D_3 + \mathfrak{k} 4\pi u D_2, \tag{45b}$$

und durch Einsetzen von D_3 und D_2

$$\begin{cases} H_1 = 0, \\ H_2 = \frac{u}{v^2 s}\frac{\partial V}{\partial z}, \\ H_3 = -\frac{u}{v^2 s}\frac{\partial V}{\partial y}. \end{cases} \tag{45c}$$

Die Bewegung einer „Punktladung".

Wir denken uns eine Ladung q in einem sehr kleinen Volumen konzentriert und fragen uns, welches Feld umgibt diese Ladung, wenn sie sich mit der Geschwindigkeit u in der Richtung der zunehmenden x bewegt. Wir denken uns das Koordinatensystem mit der Ladung starr verbunden. — Man verdankt Heaviside die Lösung dieses wichtigen Problems.

Die Form der Gleichung (45) legt es nahe, für das Potential V versuchsweise nach Analogie des bekannten Falles der Elektrostatik zu setzen:

$$V = \frac{A}{\left(\frac{x^2}{s} + y^2 + z^2\right)^{\frac{1}{2}}}. \tag{46}$$

Bildet man in der Tat die Ausdrücke

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$

so findet man leicht, daß V der Bedingung genügt

$$s\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Dann werden die Absolutwerte der Komponenten von $\mathfrak{D}$ gemäß Gleichung (44) folgende Werte annehmen:

$$\begin{cases} D_1 = \dfrac{Ax}{s4\pi v^2\left(\frac{x^2}{s} + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \\ D_2 = \dfrac{Ay}{s4\pi v^2\left(\frac{x^2}{s} + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \\ D_3 = \dfrac{Az}{s4\pi v^2\left(\frac{x^2}{s} + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \end{cases} \tag{47}$$

Gemäß Gleichung (45c) findet man weiter die Werte von H_1, H_2, H_3. Es ist nämlich

$$(48)\qquad \begin{cases} H_1 = 0, \\ H_2 = -\dfrac{u}{v^2 s}\dfrac{Az}{\left(\dfrac{x^2}{s}+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \\ H_3 = \dfrac{u}{v^2 s}\dfrac{Ay}{\left(\dfrac{x^2}{s}+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \end{cases}$$

Aus (47) ergibt sich der Absolutwert der Verschiebung

$$(49)\qquad D = \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2}.$$

Zieht man von der „Punktladung" einen Radiusvektor r, so ist

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Setzt man daher die Werte von D_1, D_2, D_3 ein, so findet man leicht

$$(50)\qquad D = \frac{Ar}{s 4\pi v^2 \left(\dfrac{x^2}{s}+r^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Bezeichnet man ferner den Winkel, welchen r mit der Richtung der zunehmenden x, also mit i bildet, mit γ, so wird

$$D = \frac{A}{4\pi r^2 s v^2 \left(\dfrac{\cos^2\gamma}{s}+\sin^2\gamma\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$D = \frac{A\sqrt{s}}{4\pi r^2 v^2 \left(1-\dfrac{u^2}{v^2}\sin^2\gamma\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Man erkennt, daß $\mathfrak{D}$ radial ist. Man kann demgemäß für $\mathfrak{D}$ schreiben

$$(51)\qquad \mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{r}_1 A\sqrt{s}}{4\pi r^2 v^2 \left(1-\dfrac{u^2}{v^2}\sin^2\gamma\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Es erübrigt, die Konstante A zu bestimmen. Dazu dient der Umstand, daß der gesamte Verschiebungsfluß durch eine beliebige die Ladung q einschließende Fläche gleich der Ladung ist.

$$\int \mathfrak{D}\, d\mathfrak{g} = q$$

oder

$$\int \frac{\mathfrak{r}_1 A\sqrt{s}\, d\mathfrak{g}}{4\pi r^2 v^2 \left(1-\frac{u^2}{v^2}\sin^2\gamma\right)^{\frac{3}{2}}} = q$$

bzw.

$$\int \frac{A\mathfrak{r}\, d\mathfrak{g}}{s\,4\pi v^2 \left(\frac{x^2}{s}+r^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = q. \tag{52}$$

Da $\mathfrak{D}$ radial ist, so wählen wir als einschließende Fläche eine Kugelfläche, welche wir uns um die Ladung als Mittelpunkt beschrieben denken. Dann fallen $\mathfrak{r}$ und $d\mathfrak{g}$ in dieselbe Richtung. Bei der Einteilung der Kugelfläche in ihre Elemente verfahren wir in der Weise, daß wir eine Schar unendlich benachbarter paralleler Ebenen senkrecht zur x-Achse durch die Kugel legen. Dann wird die Oberfläche in eine unendlich große Zahl von Zonen zerlegt, von denen eine jede die Fläche hat

$$dg = 2\pi r\, dx.$$

Daher kann anstatt (52) gesetzt werden

$$\int_{-r}^{r} \frac{A\,2\pi r^2 dx}{s\,4\pi v^2 \left(\frac{x^2}{s}+r^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = q. \tag{53}$$

Die in diesem Integral vorkommende Klammer transformieren wir, um die bekannte Formel

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C$$

anwenden zu können. Es ist nämlich

$$\left(\frac{x^2}{s}+r^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}} = \left(x^2+\frac{s r^2}{1-s}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1-s}{s}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Daher nimmt (53) die Form an

$$\frac{Ar^2}{s\,2v^2\left(\frac{1-s}{s}\right)^{\frac{3}{2}}}\int_{-r}^{r}\frac{dx}{\left(x^2+\frac{sr^2}{1-s}\right)^{\frac{3}{2}}}=q$$

oder durch Integration

$$\frac{A}{\sqrt{s}v^2}=q,$$

$$A=qv^2\sqrt{s}.$$

Für die Verschiebung einer sich mit der konstanten Geschwindigkeit u bewegenden Punktladung finden wir deshalb

(54) $$\mathfrak{D}=\frac{r_1 q s}{4\pi r^2\left(1-\frac{u^2}{v^2}\sin^2\gamma\right)^{\frac{3}{2}}}$$

oder

(55) $$\mathfrak{D}=\frac{rq}{\sqrt{s}4\pi\left(\frac{x^2}{s}+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Aus Gleichung (48) findet man den Absolutwert der magnetischen Kraft. Es ist nämlich

$$H=\sqrt{H_2^2+H_3^2}$$

$$=\frac{Aur\sqrt{\frac{y^2+z^2}{r^2}}}{v^2sr^3\left(\frac{x^2}{sr^2}+\frac{y^2+z^2}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

folglich

$$H=\frac{Au\sqrt{s}\sin\gamma}{v^2r^2\left(1-\frac{u^2}{v^2}\sin^2\gamma\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Setzt man endlich den gefundenen Wert von A ein, so ergibt sich

(56) $$H=\frac{qus\sin\gamma}{r^2\left(1-\frac{u^2}{v^2}\sin^2\gamma\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Um ferner die Komponenten von $\mathfrak{F}$, nämlich

$$-\frac{\partial V}{\partial x}, \quad -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad -\frac{\partial V}{\partial z}$$

zu finden, beachten wir Gleichungen (44) und (47) und setzen

$$F_1 = \frac{Ax}{s\left(\frac{x^2}{s}+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$F_2 = \frac{Ays}{s\left(\frac{x^2}{s}+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$F_3 = \frac{Azs}{s\,(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und da

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2},$$

so folgt

$$F = \frac{A\sqrt{s}}{[x^2+s(y^2+z^2)]}. \tag{57}$$

Für A war der Wert $qv^2\sqrt{s}$ gefunden worden. Daher

$$F = \frac{qv^2 s}{x^2+s\,(y^2+z^2)}. \tag{57a}$$

Dieser Ausdruck läßt sich unter Einführung von

$$y^2 + z^2 = r^2 \sin^2\gamma$$

auch schreiben

$$F = \frac{qv^2 s}{r^2\left(1-\frac{u^2}{v^2}\sin^2\gamma\right)}. \tag{58}$$

Da in Entfernungen, welche groß sind im Vergleich mit den Dimensionen eines geladenen Körpers, letzterer als „Punkt"-ladung aufgefaßt werden kann, so geben die Gleichungen (54), (56) und (58) wichtige Aufschlüsse über das Feld sich geradlinig bewegender geladener Körper in hinreichend großen Entfernungen. Gleichung (54) lehrt, daß die Verschiebung für eine bestimmte Richtung des Radiusvektors r sich verändert, d. h. abnimmt umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung, und daß die Verschiebung für einen bestimmten Wert von r zunimmt, wenn der Winkel γ, welchen r mit i bildet, von 0^0

bis 90^0 wächst. Die Verschiebung ist symmetrisch zu einer durch die Punktladung senkrecht zur Bewegungsrichtung gelegten Ebene. Bei wachsender Geschwindigkeit konzentriert sich die Verschiebung mehr und mehr parallel zu dieser Ebene. Ist $u = v$, so ist die in die Bewegungsrichtung fallende Komponente der Verschiebung Null und die Verhältnisse sind gerade so, als ob eine ebene Welle sich mit Lichtgeschwindigkeit fortbewegte.

Die magnetischen Kraftlinien sind Kreise, deren Mittelpunkte auf der x-Achse liegen. Auch die magnetische Kraft nimmt umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung ab. Bei wachsendem u konzentriert sich das Feld immer mehr um die Äquatorialebene, um bei Lichtgeschwindigkeit ganz in diese Ebene zu fallen. Bei dieser kritischen Geschwindigkeit nehmen auch $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{H}$ unendliche Werte an.

Die Bewegung eines geladenen Ellipsoides.

Ein Ellipsoid a, b, b mit der Ladung q bewege sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ längs der Rotationsachse a. Das Feld, welches den geladenen Körper umgibt, sei zu bestimmen. Es handelt sich hier um die Lösung der Differentialgleichung (45):

$$\frac{s\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Wir nehmen an, der stationäre Zustand sei erreicht, dann wird das Feld der bewegten Ladung sich wie ein starrer Körper bewegen und die Ladung selbst wird sich so auf der Oberfläche des Ellipsoides verteilt haben, wie dies dem Gleichgewichtszustand entspricht. Erinnern wir uns nun, daß $-\nabla V$ die Kraft bedeutet, welche eine an der Bewegung teilnehmende Einheitsladung erfährt, so muß die Verteilung derart sein, daß auf eine an die Oberfläche gebrachte Einheitsladung — diese möge die Oberfläche eben nicht berühren — keine Kraft wirkt, welche sie längs der Oberfläche zu verschieben strebt. Anstatt die Einheitsladung an die Oberfläche zu bringen, kann man auch die auf einem Flächenelement befindliche Ladung ins Auge fassen und ohne weiteres behaupten, daß bei freier

Verteilung der Ladung diese elementare Flächenladung keine tangentiale Kraftwirkung erleiden darf, und daraus den Schluß ziehen, daß V auf der Oberfläche konstant ist und daß infolgedessen $-\nabla V = \mathfrak{F}$ überall auf der Oberfläche senkrecht steht. Hieraus schließen wir weiter, daß $\mathfrak{F}$ im Innern des Ellipsoides verschwindet. Dann verschwinden dort ebenfalls gemäß den Gleichungen (44) und (45c) $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{H}$. Zum Aufsuchen der Funktion V haben wir nun folgende Anhaltspunkte:

1. V muß auf dem Ellipsoid a, b, b konstant sein;
2. Es muß überall in dem umgebenden Raume der Bedingung genügen:
$$s\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0;$$
3. Es muß mit seinen ersten Derivierten in dem betrachteten Raume stetig sein und im Unendlichen den Wert Null annehmen.

Wollte man nun ohne weiteres nach Analogie des elektrostatischen Problems eine Lösung der gegebenen Differentialgleichung erstreben, so würde man auf eine nunmehr zu erörternde Schwierigkeit stoßen. Diese Schwierigkeit ist die Frage der Verteilung der Elektrizität auf der Oberfläche des sich bewegenden Ellipsoides. Ist diese Verteilung dieselbe wie bei einem ruhenden Ellipsoid? Wir haben gesehen, daß $\mathfrak{F}$ im Innern des Ellipsoides verschwindet. Bringt man daher eine Punktladung an einen Punkt im Innern des Ellipsoides und konstruiert zu diesem Punkte als Vertex einen unendlich dünnen Doppelkegel, so müssen, weil $\mathfrak{F}$ nach Gleichung (58b) radial ist und mit dem umgekehrten Quadrat der Entfernung abnimmt, die von dem Doppelkegel auf der Oberfläche abgegrenzten elementaren Flächenladungen eine gleiche und entgegengesetzte Kraftwirkung auf die Punktladung ausüben. Da dies für alle Doppelkegel gilt, welche von dem Punkte aus nach der Oberfläche gezogen werden, so ist, wie wir aus der Elektrostatik wissen, die Verteilung eine eindeutige und dieselbe wie im ruhenden Zustande.

Beim Aufsuchen der Funktion V, welche auf der Oberfläche des Ellipsoides

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1 \tag{59}$$

einen konstanten Wert haben, der Gleichung (45) genügen und selbst ebenso wie ihre ersten Derivierten im betrachteten Raume stetig sein muß, unterstützt uns unsere Kenntnis der analogen Funktion V' eines ruhenden geladenen Ellipsoides a', b, b. Denkt man sich ein solches Ellipsoid von einem System von äquipotentiellen Flächen umgeben, so lehrt die Elektrostatik, daß diese Flächen dargestellt sind durch die konfokalen Ellipsoide

$$\frac{x^2}{a'^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{b^2+\lambda}=1 \tag{60}$$

und das Potential V^1 auf diesen Flächen

$$V'=\int_{\lambda}^{\infty}\frac{C^1 d\lambda}{\sqrt{(a'^2+\lambda)\,(b^2+\lambda)^2}}. \tag{61}$$

Dieser Wert von V' genügt der Laplaceschen Gleichung

$$\nabla^2 V'=0, \tag{62}$$

ist konstant auf der Oberfläche des Ellipsoides und ist mit seinen Derivierten nach x, y, z stetig. Außerdem verschwindet V' in unendlicher Entfernung. Es liegt nun nahe, zu schließen, daß, wenn der Wert von V' in Gleichung (61) der Gleichung (62) genügt, dann

$$V=\int_{\lambda}^{\infty}\frac{C'' d\lambda}{\sqrt{(a'^2+\lambda)\,(b^2+\lambda)^2}}, \tag{63}$$

wo λ mit x, y, z durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{s\,(a'^2+\lambda)}+\frac{y^2}{b^2+y}+\frac{z^2}{b^2+\lambda}=1 \tag{64}$$

verknüpft ist, der Gleichung (45)

$$s\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

genügen wird. Und in der Tat findet man leicht durch Bildung der Ausdrücke

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial z},$$

daß der Gleichung (45) genügt wird, daß V auf der Oberfläche des Ellipsoides einen konstanten Wert hat, daß es mit seinen ersten Derivierten stetig ist und im Unendlichen verschwindet.

Man erkennt nun weiter, daß, wenn wir in den vorstehenden Gleichungen für $a's$ den Wert a einsetzen, dann für das bewegte Ellipsoid a, b, b die Gleichungen bestehen:

$$V = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{C d\lambda}{\sqrt{(a^2+s\lambda)(b^2+\lambda)^2}}, \tag{66}$$

$$\frac{x^2}{a^2+s\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{b^2+\lambda} = 1. \tag{67}$$

Es bleibt C zu bestimmen. Hierzu stellen wir folgende Überlegung an. In großen Entfernungen vom Ellipsoid wird a und b gegen λ verschwinden und das die Ladung umgebende Feld wird dann dasselbe sein wie dasjenige einer Punktladung. Die Gleichungen (66) und (67) nehmen dann die Form an

$$V = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{C d\lambda}{(s\lambda)^{\frac{1}{2}}\lambda}, \tag{68}$$

$$\frac{x^2}{s\lambda} + \frac{y^2}{\lambda} + \frac{z^2}{\lambda} = 1. \tag{69}$$

Wir berechnen nun den Wert der Kraft F in Punkten auf der x-Achse. Da nach Gleichung (58) $\mathfrak{F}$ radial, so verschwinden auf der x-Achse die Komponenten F_2 und F_3; daher wird dort:

$$F_1 = F = -\frac{\partial V}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x}.$$

Nun ist

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = \frac{C}{\sqrt{s}\lambda^{\frac{3}{2}}}.$$

Für $y = z = 0$ wird $x^2 = s\lambda$ und

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{2x}{s}.$$

Daher

$$F = \frac{2C}{x^2}.$$

Dieser Wert muß identisch sein mit dem bereits für eine Punktladung abgeleiteten Werte in Gleichung (57a). Es wird nach dieser Gleichung bei $y = z = 0$:

$$F = \frac{qv^2 s}{x^2}.$$

Folglich

$$C = \frac{qv^2 s}{2}.$$

Diesen Wert von C setzen wir in Gleichung (66) ein und erhalten für das Potential eines bewegten geladenen Ellipsoides

$$V = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{qv^2 s}{2\sqrt{(a^2 + s\lambda)(b^2 + \lambda)^2}}. \tag{70}$$

Indem wir nunmehr dazu übergehen, aus den Gleichungen (70) und (67) die dielektrische Verschiebung und die magnetische Kraft und dann weiter die Energie des sich bewegenden geladenen Ellipsoides zu berechnen, wollen wir die Gleichungen auf eine bequemere Form bringen. Der Umstand, daß alles um die a-Achse des Ellipsoids symmetrisch ist, legt es nahe, $y^2 + z^2 = \varrho^2$ zu setzen, so daß ϱ den senkrechten Abstand von der x-Achse bedeutet.

Wir bezeichnen die Komponenten von $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{F}$, welche in die ϱ-Richtung fallen, mit D_ϱ und F_ϱ. Es ist dann

$$D_\varrho^2 = D_2^2 + D_3^2; \quad F_\varrho^2 = F_2^2 + F_3^2.$$

Dem Beispiele G. F. C. Searles folgend, wollen wir ferner als Parameter der Flächen konstanten Potentials, d. h. der konfokalen Ellipsoide Gleichung (67) anstatt λ ihre x-Achsen wählen und diese mit h bezeichnen. Dann ist

$$h^2 = a^2 + s\lambda.$$

Setzt man dann ferner

$$a^2 + sb^2 = l^2,$$

so wird

$$b^2 + \lambda = \frac{h^2 - l^2}{s}.$$

Folglich nehmen die Gleichungen (70) und (67) die Form an

$$V' = qsv^2 \int_h^\infty \frac{dh}{h^2 - l^2}, \tag{72}$$

$$\frac{x^2}{h^2} + \frac{\varrho^2}{h^2 - l^2} = 1. \tag{73}$$

Wir können weiter anstatt der Koordinaten x und ϱ die Koordinaten h und α anführen, wo α bestimmt ist durch

$$x = h \cos \alpha.$$

Dann ist

$$\varrho = \frac{\sqrt{h^2 - l^2}}{\sqrt{s}} \sin \alpha.$$

Die Figur erläutert diese Beziehungen. Das Ellipsoid stellt eine Gleichgewichtsfläche dar. Seine große Achse liegt auf der x-Achse und hat die Länge $2h = 2\sqrt{a^2 + s\lambda}$. Um den Mittelpunkt ist mit dem Radius h ein Kreis beschrieben. Wählt man auf dem Ellipsoid einen beliebigen Punkt P, so ist P für die Zwecke der vorliegenden Untersuchung durch die Koordinaten x und ϱ hinreichend bestimmt. Zieht man einen Radius nach der Stelle des Kreises, wo die Verlängerung von ϱ letzteren schneidet, und bezeichnet man den Winkel,

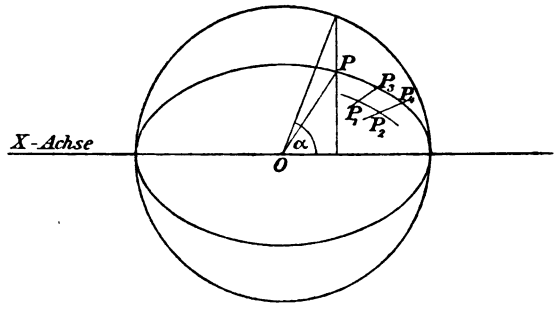

Fig. 1

welchen dieser Radius mit der x-Achse bildet, mit α, so erkennt man leicht die Richtigkeit der angegebenen Werte von x und ϱ.

Aus Gleichung (73) folgt

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h^2 - l^2}{h^2 - l^2\cos^2\alpha},$$

$$\frac{\partial h}{\partial \varrho} = \frac{h\sqrt{h^2 - l^2}\sin\alpha\sqrt{s}}{h^2 - l^2\cos^2\alpha}.$$

Daher

$$(74)\quad D_1 = -\frac{1}{4\pi v^2}\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi v^2}\frac{dV}{dh}\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{sq\cos\alpha}{4\pi(h^2 - l^2\cos^2\alpha)},$$

$$(75)\quad D_\varrho = -\frac{1}{s4\pi v^2}\frac{\partial V}{\partial \varrho} = -\frac{1}{s4\pi v^2}\frac{dV}{dh}\frac{\partial h}{\partial \varrho}$$

$$= \frac{qh\sin\alpha\sqrt{s}}{4\pi\sqrt{h^2 - l^2}(h^2 - l^2\cos^2\alpha)}.$$

Um ferner H zu finden, beachten wir, daß

$$H = \sqrt{H_2^2 + H_3^2},$$

also gemäß Gleichung (45)

$$H = \frac{u}{v^2 s}\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2} = \frac{u}{v^2 s}\frac{\partial V}{\partial \varrho} = 4\pi u D_\varrho.$$

Nach Gleichung (75) folgt dann

$$(76)\qquad H = \frac{uqh\sin\alpha\sqrt{s}}{\sqrt{h^2 - l^2}(h^2 - l^2\cos^2\alpha)}.$$

§ 4.

Die elektromagnetische Energie der Translation geladener Körper.

Wie bereits früher erwähnt wurde, hat die Elektronentheorie aus der Maxwellschen die Auffassung übernommen, daß der Sitz der elektromagnetischen Energie das die geladenen Körper umgebende Medium sei. Die Energie ist von der Art der Energie einer elastischen Deformation. Der Ausdruck, welchen Maxwell hierfür findet, läßt sich leicht mit dem

experimentell begründeten Werte der älteren Elektrizitätslehre in Einklang bringen. Ohne diese Übereinstimmung erschöpfend beweisen zu wollen, soll ganz kurz angedeutet werden, wie aus der Gleichung für die elektrostatische Energie der Maxwellsche Wert abgeleitet werden kann.

Ist U das Potential einer Ladung, so setzt die Fernwirkungstheorie für die elektrische Energie

$$W = \frac{1}{2}\int U\varrho\, d\tau,$$

wo ϱ die Dichte der Elektrizität. Es ist nun nach Anhang Gleichung (26)

$$\int U(\nabla\mathfrak{D})\, d\tau = \int U(\mathfrak{D}\, d\mathfrak{g}) - \int (\nabla U)\mathfrak{D}\, d\tau.$$

Die Volumenintegrale sind über den ganzen Raum zu erstrecken. Die das System begrenzende Fläche denken wir uns ins Unendliche gerückt. Dann verschwindet der erste Term der rechten Seite, indem U Null wird. Beachten wir nun, daß

$$-\nabla U = \mathfrak{E},$$

wo $\mathfrak{E}$ die elektrische Kraft bedeutet, und daß nach Gleichung (9)

$$\mathfrak{E} = 4\pi v^2\mathfrak{D},$$

so folgt

$$W = \frac{1}{2}\int U\varrho\, d\tau = 2\pi v^2\int \mathfrak{D}^2 d\tau.$$

Das Raumintegral ist nunmehr über den ganzen Raum, welcher die Ladungen umgibt, zu erstrecken. Es stellt die Energie des Zwangszustandes des Mediums dar. Die magnetische Energie der Magnetisierung und elektrischer Ströme kann in ganz analoger Weise dargestellt werden. — Wir kehren nun zur Behandlung des Problems bewegter Ladungen zurück. Bezeichnen wir die elektrische Energie mit W, die magnetische mit T, so haben wir

$$W = 2\pi v^2\int \mathfrak{D}^2 d\tau,$$

$$T = \frac{1}{8\pi}\int H^2 d\tau.$$

Gemäß Gleichungen (44) und (45) können diese Beziehungen auch geschrieben werden

$$W = \frac{1}{8\pi v^2}\int\left(F_1^2 + \frac{1}{s^2}F_\varrho^2\right)d\tau,$$

$$T = \frac{1}{8\pi v^2}\int\frac{1u^2}{s^2v^2}F_\varrho^2\,d\tau.$$

Daher

$$W - T = \frac{1}{8\pi v^2}\int\left(F_1^2 + \frac{1}{s}F_\varrho^2\right)d\tau. \tag{77}$$

Hierfür läßt sich auch schreiben

$$W - T = \frac{1}{2}\int\left(F_1\frac{F_1}{4\pi v^2} + F_\varrho\frac{F_\varrho}{4\pi v^2 s}\right)d\tau$$

oder

$$W - T = \frac{1}{2}\int(\mathfrak{F}\mathfrak{D})\,d\tau.$$

Setzt man für F den Wert $-\nabla V$, so ergibt sich

$$W - T = -\frac{1}{2}\int(\nabla V)\,\mathfrak{D}\,d\tau$$

und dieser Ausdruck ist nach dem eben angewandten Rechengesetz

$$-\frac{1}{2}\int(\nabla V)\,\mathfrak{D}\,d\tau = \frac{1}{2}\int V(\nabla\mathfrak{D})\,d\tau - \frac{1}{2}\int V(\mathfrak{D}\,dg).$$

Läßt man die einschließende Grenzfläche ins Unendliche rücken, wo V Null wird, so wird die Differenz von elektrischer und magnetischer Energie

$$W - T = \frac{1}{2}\int V(\nabla\mathfrak{D})\,d\tau.$$

Wendet man diese Gleichung auf das sich bewegende Ellipsoid an, so ist das Volumenintegral durch ein über die Oberfläche des geladenen Körpers zu erstreckendes Flächenintegral zu ersetzen. Auf der Oberfläche ist V konstant. Es habe hier den Wert V_0. Dann ist unter Benutzung des Gaußschen Satzes

$$W - T = \frac{1}{2}V_0 q.$$

Dieses wichtige Ergebnis wurde zuerst von G. F. C. Searle erhalten.

Die gesamte elektromagnetische Energie J eines sich gleichförmig bewegenden Ellipsoides ist daher

$$J = \frac{1}{2} q V_0 + 2T \tag{78}$$

oder auch

$$J = W + T = \frac{1}{8\pi v^2} \int \left(F_1^2 + \frac{2-s}{s^2} F_\varrho^2 \right) d\tau. \tag{79}$$

Wir berechnen J nach Gleichung (78).

Um zunächst den Ausdruck $\frac{1}{2} q V_0$ zu berechnen, benutzen wir Gleichung (72). Es ist

$$V_0 = \int_a^\infty dV = qsv^2 \int_a^\infty \frac{dh}{h^2 - l^2} = \frac{qsv^2}{2l} \log \frac{a+l}{a-l}. \tag{80}$$

Demgemäß ergibt sich für die Differenz zwischen elektrischer und magnetischer Energie

$$W - T = \frac{q^2 s v^2}{4l} \log \frac{a+l}{a-l}. \tag{81}$$

Zur Berechnung von T werten wir das folgende Integral aus [siehe Gleichung (76)]

$$T = \frac{1}{8\pi} \int H^2 d\tau = \frac{1}{8\pi} \int \left[\frac{uqh \sin\alpha \sqrt{s}}{\sqrt{h^2 - l^2 (h^2 - l^2 \cos^2\alpha)}} \right]^2 d\tau. \tag{82}$$

Man erzielt nach G. F. C. Searle eine große Vereinfachung, wenn man bei der Einteilung des das Ellipsoid umgebenden Raumes in Raumelemente folgendermaßen verfährt.

Es sei in Fig. 1 (§ 3) P_1 und P_2 durch h und P_3 und P_4 durch $h + dh$ des unendlich benachbarten konfokalen Ellipsoides bestimmt; ferner sei P_2 und P_4 durch α und P_1 und P_3 durch $\alpha + d\alpha$ bestimmt.

Dann ist die elementare Fläche $P_1 P_3 P_4 P_2$ nach einem bekannten Satze, welcher zur Substitution neuer Veränderlicher in Doppelintegrale angewandt wird

$$df = \left(\frac{\partial x}{\partial h} \frac{\partial \varrho}{\partial \alpha} - \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial \varrho}{\partial h} \right) dh d\alpha.$$

Setzt man die Werte ein, so findet man

$$df = \frac{h^2 - l^2\cos^2\alpha}{\sqrt{h^2-l^2}\sqrt{s}}\,dh\,d\alpha.$$

Läßt man das Flächenelement um die x-Achse rotieren, so schneidet dasselbe einen dünnen Ring aus, dessen Volumen ist

$$d\tau = df \cdot 2\pi\varrho = \frac{2\pi\,(h^2 - l^2\cos^2\alpha)\sin\alpha}{s}\,dh\,d\alpha.$$

Setzt man den für das Volumenelement gefundenen Wert in Gleichung (82) ein, so ergibt sich

$$T = \frac{1}{4}q^2u^2\int_a^\infty\int_0^\pi \frac{h^2\sin^3\alpha\,dh\,d\alpha}{(h^2-l^2)\,(h^2-l^2\cos^2\alpha)}. \tag{83}$$

Es ist aber

$$\int_0^\pi \frac{\sin^3\alpha\,d\alpha}{h^2-l^2\cos^2\alpha} = -\frac{1}{l^2}\Big[\cos\alpha - \frac{h^2-l^2}{2hl}\log\frac{h+l\cos\alpha}{h-l\cos\alpha}\Big]_0^\pi =$$

$$= \frac{1}{l^2}\Big(2 - \frac{h^2-l^2}{hl}\log\frac{h+l}{h-l}\Big).$$

Dadurch wird

$$T = \frac{qu^2}{4l^2}\int_a^\infty\Big(\frac{2h^2}{h^2-l^2} - \frac{h}{l}\log\frac{h+l}{h-l}\Big)\,dh$$

$$= \frac{qu^2}{4l^2}\Big[h - \frac{h^2+l^2}{2l}\log\frac{h+l}{h-l}\Big]_a^\infty.$$

Der Klammerausdruck läßt sich auch schreiben

$$h - \frac{l}{2}\Big(\frac{h^2}{l^2}+1\Big)\log\frac{1+\frac{l}{h}}{1-\frac{l}{h}}$$

oder

$$h - l\Big(\frac{h^2}{l^2}+1\Big)\Big(\frac{l}{h} + \frac{l^3}{3h^3} + \cdots\Big).$$

Dieser Wert verschwindet, wenn h unendlich wird. Deshalb wird

$$T = \frac{q^2u^2}{4l}\Big(\frac{a^2+l^2}{2l^2}\log\frac{a+l}{a-l} - \frac{a}{l}\Big). \tag{84}$$

Addiert man zu dem Werte von $2T$ den Wert von $\frac{V_0 q}{2}$ aus (81), so ergibt sich die gesamte elektromagnetische Energie

$$W+T=\frac{q^2v^2}{4l}\left[\frac{u^2}{v^2}\left(\frac{a^2}{l^2}+1\right)\log\frac{a+l}{a-l}-\frac{2a}{l}\frac{u^2}{v^2}\right] + \frac{q^2v^2}{4l}\left[\left(1-\frac{u^2}{v^2}\right)\log\frac{a+l}{a-l}\right] \tag{85}$$

oder

$$W+T=\frac{q^2v^2}{4l}\left[\left(1+\frac{u^2a^2}{v^2l^2}\right)\log\frac{a+l}{a-l}-\frac{2u^2a}{v^2l}\right]. \tag{86}$$

Man folgert aus dieser Gleichung, daß die Energie des geladenen Ellipsoides mit zunehmender Geschwindigkeit der Translation schnell zunimmt, um bei Erreichung der Lichtgeschwindigkeit unendlich groß zu werden. Es ist nämlich

$$\log\frac{a+l}{a-l}=\log\frac{a+\sqrt{a^2-sb^2}}{a-\sqrt{a^2-sb^2}}.$$

Wird $u=v$, so wird $s=0$ und

$$\log\frac{a+l}{a-l}=\log\frac{2a}{0}=\infty.$$

Bei der Ableitung der wichtigen Gleichung (86) sind wir im wesentlichen der grundlegenden Arbeit von G. F. C. Searle[1]) gefolgt.

Man kann sich nun die Frage vorlegen, welches Analogon bietet die Elektrostatik zu dem Problem der Bewegung eines geladenen Ellipsoides, d. h. wie muß man sich die Dimensionen, das umgebende Medium, die Ladung des Ellipsoides geändert denken, damit es im Ruhezustand dieselbe Energie habe. Ohne auf die mathematische Ableitung an dieser Stelle weiter einzugehen, sei nur bemerkt[2]), daß das Potential auf dem sich bewegenden Ellipsoide a, b, b dasselbe ist wie auf einem ruhenden $a, \sqrt{s}b, \sqrt{s}b$, wenn die Lichtgeschwindigkeit im umgebenden Medium zu $v\sqrt{s}$ reduziert gedacht wird. Bezeichnet man ferner die elektrostatische Kraft des ruhenden

1) G. F. C. Searle, Phil. Mag. 44 p. 329. 1896.

2) A. H. Bucherer, Drudes Ann. p. 326—335, vol. 8. 1902.

Ellipsoides mit F', so ist die Gesamtenergie ganz analog Gleichung (79)

$$J = \frac{1}{8\pi}\frac{1}{v^2 s}\int\left(F_1'^2 + F_\varrho'^2\frac{2-s}{s^2}\right)d\tau. \tag{87}$$

Die elektromagnetische Energie einer sich gleichförmig bewegenden geladenen Kugel.

Die einfachste Annahme, welche wir über die Gestalt eines Elektrons machen können, ist, daß es kugelförmig sei. Ferner wollen wir annehmen, daß seine Ladung gleichmäßig über seine Oberfläche verteilt und daß es undeformierbar sei. Es ergeben sich dann leicht die Werte für seine magnetische und elektrische Energie, wenn man in den entsprechenden Ausdrücken, welche für das Ellipsoid abgeleitet wurden, $b = a$ bzw. $l = \frac{au}{v}$ setzt.

Dann liefern die Gleichungen (81), (84) und (86)

$$W - T = \frac{q^2 s v^2}{4a}\cdot\frac{v}{u}\log\frac{v+u}{v-u}, \tag{88}$$

$$T = \frac{q^2 v^2}{4a}\left(\frac{1+\frac{u^2}{v^2}}{2\frac{u}{v}}\log\frac{v+u}{v-u} - 1\right), \tag{89}$$

$$W = \frac{q^2 v^2}{4a}\left(\frac{v}{u}\frac{s+2}{2}\log\frac{v+u}{v-u} - 1\right), \tag{90}$$

$$W + T = \frac{q^2 v^2}{2a}\left(\frac{v}{u}\log\frac{v+u}{v-u} - 1\right). \tag{91}$$

Die gewöhnliche elektrostatische Energie einer geladenen Kugel ist bekanntlich

$$\frac{q^2 v^2}{2a}.$$

Wird die Kugel aus ihrem Bewegungszustand zur Ruhe gebracht, so bleibt nur dieser Teil ihrer Energie übrig. Gemäß Gleichung (91) wird daher ein Betrag

$$J_u = W + T - \frac{q^2 v^2}{2a} = \frac{q^2 v^2}{2a}\left(\frac{v}{u}\log\frac{v+u}{v-u} - 2\right) \tag{91a}$$

abgegeben, wenn die Kugel aus ihrer gleichförmigen Bewegung

zur Ruhe gebracht wird. Entwickelt man $\log\frac{v+u}{v-u}$, indem man setzt

$$\log\frac{1+\frac{u}{v}}{1-\frac{u}{v}} = 2\left(\frac{u}{v} + \frac{u^3}{3v^3} + \frac{u^5}{5v^5}\cdots\right), \tag{92}$$

so läßt sich für J_u setzen

$$J_u = \frac{q^2}{a}u^2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\frac{u^2}{v^2} + \frac{1}{7}\frac{u^4}{v^4}\cdots\right). \tag{92a}$$

Man erkennt aus dieser Gleichung, daß die Energie der translatorischen Bewegung schnell anwächst, wenn u sich der Lichtgeschwindigkeit nähert.

§ 5.

Der Begriff der elektromagnetischen Masse.

Die Tatsache, daß ein geladener Körper durch seine Bewegung elektromagnetische Energie gewinnt, legt die Analogie der kinetischen Energie bewegter Massen nahe. Definiert man, wie in der Mechanik, die Masse m_u aus der kinetischen Energie ihrer Bewegung, so würde man setzen

$$m_u = \frac{2J_u}{u^2} = \frac{q^2}{a}\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{5}\frac{u^2}{v^2} + \frac{2}{7}\frac{u^4}{v^4}\cdots\right). \tag{93}$$

Während man aber in der Mechanik zu übereinstimmenden Werten der Masse gelangt, ob man sie aus der kinetischen Energie ihrer Bewegung berechnet oder aus der Kraft, welche in der Richtung ihrer Bewegung eine bestimmte Beschleunigung hervorruft, oder endlich aus der Kraft, welche senkrecht zur Bewegungsrichtung wirkend eine bestimmte Winkelbeschleunigung erzeugt, kommt man bei der Ausrechnung der elektromagnetischen Masse zu abweichenden Werten je nach dem Wege, welchen man zur Auswertung einschlägt. Der Begriff der elektromagnetischen Masse hängt also jedesmal ab von den besonderen Umständen, für welche die Masse zu berechnen ist. Wenden wir uns nun zur Berechnung der Masse, welche bei einer longitudinalen, d. h. in die Bewegungsrichtung

fallenden Beschleunigung, und ferner der Masse, welche bei einer rein transversalen Beschleunigung in Frage kommt.

Bezeichnen wir mit Heaviside die Bewegungsgröße mit $\mathfrak{M}$, so ist die Kraft, welche diese Größe zeitlich ändert, pro Volumeneinheit

$$\mathfrak{P} = \frac{d\mathfrak{M}}{dt} = \frac{dM}{dt} \cdot \mathfrak{M}_1 + M \frac{d\mathfrak{M}_1}{dt}. \tag{94}$$

Hier bedeutet wie immer $\mathfrak{M}_1$ einen Einheitsvektor in der Richtung von $\mathfrak{M}$.

Bei einer in die Bewegungsrichtung fallenden Beschleunigung ist

$$\frac{d\mathfrak{M}_1}{dt} = 0.$$

Daher

$$\mathfrak{P}_l = \frac{dM}{dt} \cdot \mathfrak{M}_1. \tag{95}$$

Ist dagegen die Beschleunigung transversal, so ist, da dann $\frac{dM}{dt} = 0$, pro Volumeneinheit

$$\mathfrak{P}_t = M \frac{d\mathfrak{M}_1}{dt}. \tag{96}$$

Für die Bewegungsgröße $\mathfrak{M}$ hatten wir den zuerst von Heaviside abgeleiteten Wert

$$\mathfrak{M} = V \mathfrak{D} \mathfrak{H}$$

gefunden [siehe Gleichung (30f)].

Der Tensor von $\mathfrak{M}$ ist $\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1 = M$.

Dann folgt gemäß Gleichung (95)

$$\mathfrak{P}_l = \mathfrak{M}_1 \left(\frac{d}{dt}\right)_{\mathfrak{M}_1} (\mathfrak{M}_1 V \mathfrak{D} \mathfrak{H}). \tag{97}$$

Es folgt ohne weiteres aus den Symmetrieverhältnissen des Feldes einer sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegenden Kugel, daß äußere Kräfte nicht erforderlich sind, um die Kugel in ihrer Bewegungsrichtung zu erhalten. Die Bewegungsgröße $\mathfrak{M}$ fällt daher in die Bewegungsrichtung. Im allgemeinen fällt $\mathfrak{M}$ nicht in die Bewegungsrichtung. Denken wir uns z. B. ein Rotationsellipsoid, dessen Achse schief gegen die Bewegungsrichtung liege. Die elektro-

magnetische Energie eines solchen Ellipsoides ist größer als diejenige eines Ellipsoides, dessen Achse in die Bewegungsrichtung fällt, wie man durch Rechnung findet. Es ist daher eine Kraft erforderlich, um die Achse des Ellipsoides aus der Bewegungsrichtung zu bringen, und eine Kraft ist erforderlich, um das Ellipsoid in der schiefen Stellung zu erhalten. Man erkennt, daß in diesem Falle die Bewegungsgröße nicht in die Bewegungsrichtung fällt. $\mathfrak{M}$ hat also im allgemeinen Komponenten in der $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$-Richtung.

Bei der sich bewegenden Kugel sind die $\mathfrak{j}$- und $\mathfrak{k}$-Komponenten Null. Beachten wir dies und berechnen wir

$$\mathfrak{M} = V \mathfrak{D} \mathfrak{H}.$$

Nach Gleichung (45b) ist

$$\mathfrak{H} = -\mathfrak{j} 4\pi u D_3 + \mathfrak{k} 4\pi u D_2.$$

Daher ist im allgemeinen

$$\mathfrak{M} = 4\pi u \mathfrak{i} (D_2^2 + D_3^2) - 4\pi u \mathfrak{j} D_1 D_2 - 4\pi u \mathfrak{k} D_1 D_3.$$

Also für die Kugel, wie man natürlich auch durch Ausrechnen der linken Seite leicht findet,

$$\mathfrak{M} = 4\pi \mathfrak{u} (D_2^2 + D_3^2).$$

Da nun nach der soeben benutzten Gleichung (45b)

$$\mathfrak{H}^2 = 16\pi^2 u^2 (D_2^2 + D_3^2), \tag{98}$$

so folgt für die Bewegungsgröße pro Volumeneinheit

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{u}_1}{4\pi u} \mathfrak{H}^2. \tag{99}$$

Die Bewegungsgröße des ganzen die geladene Kugel umgebenden Feldes ist daher

$$\int \mathfrak{M} d\tau = \frac{\mathfrak{u}_1}{4\pi u} \int \mathfrak{H}^2 d\tau. \tag{100}$$

Erinnert man sich nun des Ausdruckes für die magnetische Feldenergie, so läßt sich auch schreiben

$$\int \mathfrak{M} d\tau = \frac{2T}{u} \mathfrak{u}_1, \tag{101}$$

$$M = \frac{2T}{u}, \tag{102}$$

$$P_l = \frac{dM}{dt} = \frac{dM}{du}\frac{du}{dt}. \tag{103}$$

Dividiert man P_l durch die Beschleunigung, so findet man die longitudinale Masse

$$m_l = \frac{dM}{du} = 2\frac{d}{du}\left(\frac{T}{u}\right). \tag{104}$$

Für T hatten wir gefunden (siehe Gleichung (89))

$$T = \frac{q^2v^2}{4a}\left(\frac{1+\frac{u^2}{v^2}}{2\frac{u}{v}}\log\frac{v+u}{v-u} - 1\right). \tag{105}$$

Hieraus

$$m_l = \frac{q^2v^2}{2au^2}\left[-\frac{v}{u}\log\frac{v+u}{v-u} + \frac{2}{1-\frac{u^2}{v^2}}\right] \tag{106}$$

$$= \frac{q^2v^2}{2au^2}\left(-2 - \frac{2}{3}\frac{u^2}{v^2} - \frac{2}{5}\frac{u^4}{v^4}\cdots + 2 + \frac{2u^2}{v^2} + \frac{2u^4}{v^4}\cdots\right)$$

oder

$$m_l = \frac{2}{3}\frac{q}{a}\left(1 + \frac{6}{5}\frac{u^2}{v^2} + \frac{9}{7}\frac{u^4}{v^4} + \frac{12}{9}\frac{u^6}{v^6}\cdots\right). \tag{107}$$

Beiläufig sei noch bemerkt, daß man m_l auch noch aus der elektromagnetischen Energie J_u ableiten kann. Diese erhält nämlich in der Zeiteinheit einen Zuwachs durch Einwirkung der longitudinalen Kraft

$$\frac{dJ_u}{du}\frac{du}{dt} = P_l u.$$

Hieraus folgt dann

$$P_l = \frac{1}{u}\frac{dJ_u}{du}\frac{du}{dt}. \tag{108}$$

Dividiert man die Kraft durch die Beschleunigung, so folgt für die longitudinale Masse

$$m_l = \frac{1}{u}\frac{dJ_u}{du}. \tag{109}$$

Für J_u war gemäß Gleichung (91a) gefunden worden

$$J_u = \frac{q^2v^2}{2a}\left(\frac{v}{u}\log\frac{v+u}{v-u} - 2\right).$$

Man erkennt, daß

$$(110) \qquad \frac{1}{u}\frac{dJ_u}{du} = \frac{qv^2}{2au^2}\left[-\frac{v}{u}\log\frac{1+\frac{u}{v}}{1-\frac{u}{v}} + \frac{2}{1-\frac{u^2}{v^2}}\right],$$

woraus dann derselbe Wert für m_l folgt.

Die Übereinstimmung der auf beiden Wegen erhaltenen Werte für die longitudinale Masse ist wichtig. Sie ist eine indirekte Bestätigung der Richtigkeit des Ansatzes für die Bewegungsgröße.

Wenden wir uns nunmehr zur Berechnung der transversalen Masse m_t.

Bewegt sich ein Elektron in einem magnetischen Felde, so wirkt auf dasselbe eine Kraft, welche im Schwerpunkte angreift und den Wert hat

$$(111) \qquad \mathfrak{G}_m = \int V \varrho u \mathfrak{H} \, d\tau.$$

Die Kraft steht also stets senkrecht zur Richtung der magnetischen Kraft und zur Bewegungsrichtung. Es ist eine transversale Kraft. Hat das Elektron ursprünglich eine geradlinige Bewegung, so wird die Kraft $\mathfrak{G}_m$ das Elektron ablenken, so daß eine Kurve beschrieben wird, deren Krümmungsradiusvektor vom Krümmungsmittelpunkte gezogen in jedem Zeitpunkte die entgegengesetzte Richtung wie Kraft $\mathfrak{G}_m$ hat. Die Erscheinungen, welche bei der Ablenkung eintreten, sind sehr kompliziert. Es tritt eine Strahlung elektromagnetischer Energie auf Kosten der Feldenergie des Elektrons auf, welche zur Folge hat, daß das Elektron allmählich seine translatorische Bewegung verliert. Ein kugelförmiges Elektron wird schließlich um eine Achse rotieren, welche senkrecht zu seiner Bewegungsrichtung steht. In dieser Rotation wird es verharren, indem eine Abgabe von Energie mit der Rotation nicht mehr verbunden ist.

Hier soll nur der verhältnismäßig einfache Fall erörtert werden, daß ein Elektron mit ursprünglich geradliniger gleichförmiger Geschwindigkeit in ein konstantes Magnetfeld eintritt.

Das Magnetfeld bringe eine geringe Ablenkung hervor und die geringe Abnahme der Geschwindigkeit des Elektrons durch Strahlung soll vernachlässigt werden. Es ist dies der Fall, welcher bei Versuchen realisiert wird.

Für die transversale Kraft fanden wir

$$\mathfrak{P}_t = M\frac{d\mathfrak{M}_1}{dt}. \tag{112}$$

Die Richtung von $d\mathfrak{M}_1$ steht, wie dies allgemein bei beliebigen Vektoren zutrifft, senkrecht auf $\mathfrak{M}$. Bezeichnen wir den vom Krümmungsmittelpunkt nach dem Elektron gezogenen Radiusvektor mit $\mathfrak{R}$, so läßt sich auch schreiben, wenn wir beachten, daß

$$\frac{d\mathfrak{M}_1}{dt} = -w\mathfrak{R}_1,$$

wo w die Winkelgeschwindigkeit der Drehung bedeutet,

$$\mathfrak{P}_t = -Mw\mathfrak{R}_1. \tag{113}$$

Erinnert man sich schließlich des Ausdruckes für den Absolutwert der Transversalkraft

$$P_t = m_t w u,$$

so erkennt man, daß

$$m_t = \frac{M}{u}.$$

Gemäß Gleichung (102) setzen wir

$$M = \frac{2T}{u} = \frac{q^2v^2}{2au}\left(\frac{1+\frac{u^2}{v^2}}{2\frac{u}{v}}\log\frac{1+\frac{u}{v}}{1-\frac{u}{v}} - 1\right). \tag{114}$$

Also

$$m_t = \frac{q^2}{3a}2\left(1 + \frac{6}{3\cdot5}\frac{u^2}{v^2} + \frac{9}{5\cdot7}\frac{u^4}{v^4} + \frac{12}{7\cdot9}\frac{u^6}{v^6} + \cdots\right). \tag{115}$$

H. A. Lorentz berechnete zuerst die longitudinale Masse und wies auf das verschieden schnelle Anwachsen der beiden letzteren Arten der elektromagnetischen Trägheit hin. Leider gab Lorentz die Methode seiner Berechnung nicht an.

Eine Berechnung der beiden Massen wurde später unabhängig von M. Abraham[1]) veröffentlicht. Dieser deutete die Kaufmannschen Versuchsresultate durch die Annahme, daß die Elektronen nur eine elektromagnetische Masse besäßen. H. A. Lorentz u. a. hatten die Untersuchung dieser wichtigen Frage angeregt.

Zum Schlusse sei noch darauf hingewiesen, daß ein Vergleich der drei Arten von elektromagnetischer Masse erkennen läßt, daß ihr Wert für sehr geringe Geschwindigkeiten dem Betrage

$$m_0 = \frac{2}{3}\frac{q^2}{a}$$

zustrebt.

Die Masse eines deformierten Elektrons.

Die Gleichungen, welche wir für die drei elektromagnetischen Massen erhalten haben, sind unter der Voraussetzung abgeleitet, daß die Gestalt des Elektrons starr ist, daß sie also von den Kräften, welche eine Deformation erstreben, nicht beeinflußt wird. Lassen wir diese Einschränkung fallen, so tritt die Frage an uns heran, wie wird sich die Gestalt durch eine geradlinige Bewegung ändern? Die Beantwortung hängt von weiteren Annahmen ab.

Wir wollen die fraglichen Beziehungen zunächst unter der Voraussetzung ableiten, daß das Volumen bei der Gestaltsänderung konstant bleibt. Besitzt das Elektron eine räumliche Verteilung der Elektrizität über sein Volumen, so ist die Konstanz des Volumens eine allein in Frage kommende Möglichkeit.

Die Deformation, welche das Elektron infolge seiner Bewegung erfährt, wird durch die an seiner Oberfläche angreifende elektrodynamische Kraft $\mathfrak{F}$ hervorgebracht. Diese Kraft strebt das System in denjenigen Zustand überzuführen, in welchem die potentielle Energie ein Minimum ist. Dieses Minimum wird erreicht, wenn die Oberfläche mit der äquipotentiellen

1) M. Abraham, Göttinger Nachr. 1902, Heft 1 und Drudes Annalen 1903, Heft 1.

Fläche einer Punktladung zusammenfällt. Setzt man die Gleichung für das Potential eines bewegten Ellipsoides $a = b = 0$, so findet man, daß die äquipotentiellen Flächen einer Punktladung Ellipsoidflächen sind, deren Achsen im Verhältnis

$$s^{\frac{1}{3}} : 1 : 1$$

stehen. s hat wieder den Wert $1 - \frac{u^2}{v^2}$. Wird nun eine Kugel vom Durchmesser $2a$ zu einem derartigen Ellipsoid deformiert, so sind bei Konstanz des Volumens die Achsen

$$as^{\frac{1}{3}}, \quad as^{-\frac{1}{6}}, \quad as^{-\frac{1}{6}}.$$

Setzen wir diese Parameter in die von uns abgeleitete Formel für die gesamte elektromagnetische Energie eines bewegten Ellipsoides ein, so nimmt diese bei Oberflächenladung die Form an

$$W + T = \frac{q^2 s^{-\frac{1}{3}} v^2}{2a}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{u^2}{v^2}\right).$$

Dazu kommt noch die Deformationsenergie

$$\frac{q^2 s^{-\frac{1}{6}} v^2}{2a} \cdot \frac{v}{u} \arcsin \frac{u}{v} - \frac{q^2 v^2}{2a}.$$

Die magnetische Energie beträgt

$$T = \frac{q^2 s^{-\frac{1}{3}} u^2}{3a}.$$

Für Volumenladung müssen diese Werte noch mit dem Faktor $\frac{6}{5}$ multipliziert werden.

Die transversale Masse ergibt sich nach Analogie des nicht deformierbaren Elektrons zu

$$\frac{2}{3} \frac{q^2 s^{-\frac{1}{3}}}{a}.$$

Diese Formel stimmt mit den Ergebnissen, welche W. Kaufmann bei seinen sehr sorgfältigen Versuchen erhielt.

Will man nun weiter untersuchen, wie bei Oberflächenladung ohne Einschränkung in bezug auf Konstanz des Volumens der Einfluß der Bewegung auf die Gestalt zu berechnen ist, so trifft man auf große Schwierigkeiten. Zunächst drängt sich die Frage auf, durch welche Art von Kraft die enorm große Kraft, welche bei der hohen Ladung des Elektrons auch im Ruhezustande auf die Oberfläche wirkt und diese zu vergrößern sucht, kompensiert wird. Wird diese elastische Kraft durch die Bewegung beeinflußt?

Weiter drängt sich die Frage auf: Findet die Deformation unter Konstanz der Oberfläche statt oder nicht? Man erkennt, daß durchaus jeder Anhaltspunkt fehlt, um zu einer bestimmten Auswahl unter den vielen Möglichkeiten zu gelangen. Jede besondere Annahme führt zu einer anderen Abhängigkeit der elektromagnetischen Energien und Massen von der Geschwindigkeit.

H. A. Lorentz macht nun zur Erklärung des negativen Ergebnisses des Michelson-Morleyschen Interferenzversuches die Annahme, daß die Kugel mit dem Radius a zu einem Ellipsoid mit den Achsen

$$as^{\frac{1}{2}}, \quad a, \quad a$$

deformiert wird. Eine derartige Deformation, bei welcher die Achsen senkrecht zur Bewegungsrichtung unverändert bleiben, ist sehr unwahrscheinlich. Es wären sehr künstliche Hypothesen über die der Deformation sich widersetzenden Kräfte erforderlich, um ein solches Verhalten des in bezug auf jede Achse symmetrisch gebauten Elektrons einigermaßen plausibel zu machen.

Die transversale Masse des von Lorentz angenommenen Ellipsoides berechnet sich leicht zu

$$m_t = \frac{2}{3a} \frac{q^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{v^2}}}.$$

Diese Formel steht im Einklange mit den Versuchsresultaten, wie Lorentz gezeigt hat.

Lorentz nimmt an, daß das mit Raumladung behaftete Elektron kompressibel sei. Die Dichte der Elektrizität ändert sich daher bei der Bewegung. Bei Lichtgeschwindigkeit müßte die Dichte unendlich groß werden, da das Elektron zu einer Scheibe reduziert wird.

§ 6.

Theorie und Experiment.

Es soll in diesem Paragraphen eine kurze Übersicht über die bisherigen Untersuchungen der Kathoden- und Becquerelstrahlen gegeben und die theoretische Grundlage der verschiedenen Methoden im Lichte der neuesten Forschungen erörtert werden. Es würde außerhalb des Rahmens dieses Werkchens liegen, eine erschöpfende Würdigung aller in dieses Gebiet gehörenden glänzenden Arbeiten zu unternehmen. Es sind nur wenige Arbeiten herausgegriffen, welche zu einer theoretischen Erörterung besonders geeignet schienen.

Der erste, welcher aus der Ablenkung der Kathodenstrahlen das Verhältnis $\frac{e}{m}$ von Ladung und Masse der Partikel berechnete, ist A. Schuster.[1]) Dieser hatte bereits vor dem Jahre 1890 wichtige Untersuchungen über die elektrolytische Natur der Entladungsvorgänge angestellt. Wenn auch die Analogie der letzteren mit der gewöhnlichen Elektrolyse, wie wir jetzt wissen, eine beschränkte ist, indem die negativen Partikel kein materielles Substrat haben, so gestatteten doch die Schusterschen Hypothesen damals eine sehr annehmbare Erklärung der mannigfaltigen Entladungserscheinungen. Zu welch bemerkenswerten Resultaten der von Schuster angegebene Weg einer Messung des Verhältnisses $\frac{e}{m}$ später geführt hat, ist bekannt.

Die Überlegungen Schusters sind folgende: Es sei die Masse eines negativen Partikels m, seine Geschwindigkeit u, dann ist die kinetische Energie, falls die an der Kathode ge-

1) Siehe besonders die bemerkenswerte Arbeit: Bakerian Lecture: "The dischange of electricity through gases" vom 20. März 1890. *Proceedings of the Royal Society,* vol. 47; auch *Beibl. der Annalen,* 1890.

leistete elektrische Arbeit ganz zu ihrer Erzeugung verwandt wird,

$$Ve = \frac{1}{2} mu^2. \tag{1}$$

V bedeutet hier die Potentialdifferenz und e die Ladung eines Partikels. Durchfliegt ein geladenes Teilchen ein gleichförmiges Magnetfeld $\mathfrak{H}$, so wirkt darauf eine ablenkende Kraft senkrecht zu $\mathfrak{H}$ und senkrecht zu $\mathfrak{u}$:

$$\mathfrak{F} = e\mathfrak{V}\mathfrak{u}\mathfrak{H}.$$

Der Absolutwert dieser Kraft ist, wenn die Bewegungsrichtung senkrecht zu $\mathfrak{H}$,

$$\frac{mu^2}{r} = Hue. \tag{2}$$

r bedeutet hier den Krümmungsradius. Eine Kombination der Gleichungen (1) und (2) liefert die Beziehung

$$\frac{e}{m} = \frac{2V}{H^2 r^2}. \tag{3}$$

Es erfordert die Bestimmung von $\frac{e}{m}$ daher eine Messung der Feldstärke, der Potentialdifferenz zwischen den Elektroden und ferner des Krümmungsradius.

Vom Standpunkte der neuesten experimentellen und theoretischen Forschungen läßt sich an die Ableitung von Gleichung (3) folgende Kritik anknüpfen, eine Kritik, welche sich nicht gegen die zur damaligen Zeit glänzende Leistung A. Schusters richtet. Zunächst ist die Annahme, daß die elektrische Energie ganz in die gewöhnliche Energie bewegter Massen umgewandelt werde, nicht richtig. Denn selbst wenn das Elektron eine gewöhnliche Masse besäße, würde bei der Bewegung der Ladung außerdem eine elektromagnetische Energie des das Elektron umgebenden Feldes erzeugt werden. Wie wir gesehen haben, läßt sich letztere Energie als die kinetische Energie einer bewegten elektromagnetischen Masse darstellen. Abgesehen hiervon ist eine Kombination der Gleichungen (1) und (2) im allgemeinen nicht gestattet, indem die in (1) und (2) vorkommenden m verschiedene Funktionen

der Geschwindigkeit sind, wie wir im vorhergehenden Paragraphen gesehen haben. Nur wenn die Geschwindigkeit im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit so gering ist, daß höhere Potenzen von $\frac{u}{v}$ vernachlässigt werden, dürfen die beiden Arten von Massen [vgl. Gleichungen (93) und (115)] als gleichwertig betrachtet werden. In diesem Falle gestatten die Gleichungen (1) und (2) ferner eine Berechnung der Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen.

Denn es ist

$$u = \frac{e}{m} rH. \tag{4}$$

Aus dieser Gleichung folgt auch, daß die Krümmung eines Kathodenstrahles um so größer ist, je kleiner die Geschwindigkeit der Elektronen. Gleichung (1) läßt sich auch noch in einer Weise schreiben, welche bei Anwendung von Energiemessungen gestattet, u und $\frac{e}{m}$ zu bestimmen. Voraussetzung ist wieder, daß die Strahlen „langsame" sind. Es ist die kinetische Energie von N Elektronen, welche pro Zeiteinheit einen Querschnitt des Strahles passieren,

$$W = N\frac{mu^2}{2}.$$

Anderseits ist der elektrische Strom J, welcher die Bewegung der Elektronen darstellt,

$$J = Ne.$$

Hieraus folgt

$$\frac{e}{m} = \frac{Ju^2}{2W}. \tag{5}$$

Kombiniert man diese Gleichung mit Gleichung (4), so kann man $\frac{e}{m}$ und u bestimmen. Man mißt zu diesem Zwecke W, J und außerdem die Ablenkung im Magnetfelde. W stellt die Wärmemenge dar, welche die Kathodenstrahlen beim Auftreffen auf die Lotstelle eines Thermoelementes pro Sekunde abgeben. Die Energie der gleichzeitig erzeugten Röntgenstrahlen ist in W mit eingeschlossen. Bei der Versuchsanordnung ist hierauf Rücksicht zu nehmen.

J. J. Thomson[1]) bestimmte im Jahre 1897 $\frac{e}{m}$ und u auf diese Weise. Er fand für $\frac{e}{m}$ $1{,}17 \cdot 10^7$ elektromagnetische Einheiten.

W. Kaufmann[2]) hatte im Jahre 1898 nach einer Methode, welche mit der bereits besprochenen von Schuster identisch ist, für dieses Verhältnis $1{,}86 \cdot 10^7$ gefunden, eine Zahl, welche mit den neuesten Ergebnissen vorzüglich übereinstimmt.

Man kann auch die Ablenkung in Rechnung ziehen, welche die Elektronen eines Kathodenstrahles im elektrischen Felde erfahren. In einem gleichförmigen Felde, in welches ein Elektron senkrecht zur Kraftrichtung fliegt, erfährt es eine ähnliche Ablenkung wie eine anfänglich horizontal fliegende Kugel, auf welche die Gravitationskraft wirkt.

Ist der Absolutwert der elektrischen Feldstärke E, so wirkt auf das Elektron eine Kraft Ee, unter deren Einfluß das Teilchen in Richtung der Kraft in der Zeit t die Strecke

$$s = \frac{1}{2} \frac{Eet^2}{m}$$

zurücklegt. e ist hier elektrostatisch gemessen. Nehmen wir an, s sei im Vergleich zu der Bahnlänge l sehr klein. Dann kann die Kraft als rein transversale aufgefaßt werden und die Geschwindigkeit wird sich nicht merklich geändert haben. Dann läßt sich schreiben

$$u^2 = \frac{l^2}{t^2},$$

folglich

$$s = \frac{1}{2} \frac{Eel^2}{mu^2}. \tag{6}$$

Durch Messung der Ablenkung s der Bahnlänge l und der Feldstärke E findet man $\frac{e}{mu^2}$. Mißt man außerdem die magnetische Ablenkung, so findet man $\frac{e}{m}$ und u.

Auf diese Weise fand J. J. Thomson, dem die Elektronentheorie so viel verdankt, im Jahre 1897

1) J. J. Thomson, Phil. Mag., vol. 44, p. 293.
2) W. Kaufmann, Annalen d. Physik, Bd. 65, p. 431.

$$u = 0{,}31 - 1{,}2 \cdot 10^{10},$$
$$\frac{e}{m} = 0{,}67 - 0{,}91 \cdot 10^{7},$$

während Lenard im darauffolgenden Jahre die Werte

$$u = 0{,}71 - 0{,}67 \cdot 10^{10},$$
$$\frac{e}{m} = 0{,}63 - 0{,}65 \cdot 10^{7}$$

erhielt.

Die in neuerer Zeit unternommenen Untersuchungen waren hauptsächlich auf die Beantwortung der besonders von Lenard, Lorentz, Wien und Abraham aufgeworfenen Frage gerichtet, ob die Masse des Elektrons elektromagnetischer Natur sei. Da die longitudinale und die transversale Masse, wie wir gezeigt haben, bestimmte Funktionen der Geschwindigkeit sind, so läßt sich aus der experimentell bestimmten Abhängigkeit des Verhältnisses $\frac{e}{m}$ von der Geschwindigkeit der Strahlen der Anteil berechnen, welchen die scheinbare, d. h. die elektromagnetische Masse an der Gesamtmasse hat. Lenard beobachtete zuerst durch Messungen an Kathodenstrahlen, welche durch ultraviolettes Licht ausgelöst waren, daß das Verhältnis $\frac{e}{m}$ sich bei diesen Geschwindigkeiten im Sinne der Theorie ändert. Kaufmann, welcher anfangs zu dem Resultate gelangt war, daß die scheinbare Masse von derselben Größenordnung sei wie die wirkliche und bei den schnellsten Becquerelstrahlen die letztere sogar bedeutend überträfe, konnte später mit Hilfe der Abrahamschen theoretischen Rechnungen seine Versuchsresultate dahin deuten, daß die Masse des Elektrons im wesentlichen elektromagnetischer Natur sei.

Bei seiner Untersuchung der Becquerelstrahlen erzeugte W. Kaufmann durch Superposition eines magnetischen über ein elektrisches Feld gleichzeitig eine magnetische und eine elektrische Ablenkung. Die radioaktiven Substanzen erzeugen Strahlen, deren Teilchen sich mit allen möglichen Geschwindigkeiten bewegen. Verwendet man daher ein kleines Körnchen

von Radiumbromid und läßt seine Strahlen durch eine feine runde Öffnung in ein Magnetfeld eintreten, so erhält man auf einer photographischen Platte, welche man senkrecht zur Strahlenrichtung stellt, einen Strich anstatt eines Punktes. Superponiert man gleichzeitig ein elektrisches Feld, dessen Kraftlinien den magnetischen Kraftlinien parallel laufen, so erhält man eine Kurve. Jedem Punkte dieser Kurve entspricht ein bestimmter Wert von $\frac{e}{m}$ und von u. Macht man zur Deutung der Versuchsresultate die Annahme, daß die elektrostatische Ablenkung wegen ihrer Kleinheit eine rein transversale gewesen sei, so erhält man eine Beziehung von $\frac{e}{m}$ zu u, welche sich mit der Gleichung für die transversale Masse des nicht deformierten Elektrons in Einklang bringen läßt. Vgl. Gleichung (115) des vorigen Paragraphen. Man darf hieraus schließen, daß die Masse eines Elektrons überwiegend elektromagnetischer Natur sei. Dieses Ergebnis führt zu sehr wichtigen Betrachtungen über die Natur der Materie. W. Wien hat zuerst die fundamentale Frage, ob die Mechanik elektromagnetisch zu begründen sei, in einer bemerkenswerten Arbeit (Lorentz Jubelband) behandelt. Hier kann leider auf diese Frage nicht näher eingegangen werden. —

Es ist erwähnenswert, daß die von Kaufmann erzielte Kurve beweist, daß die Geschwindigkeit eines Teiles der Elektronen so groß ist, daß bei der Stärke der angewandten Felder eine merkliche Ablenkung nicht auftritt. Die Geschwindigkeit muß daher sehr nahe an die Lichtgeschwindigkeit heranreichen. Für die langsamen Strahlen fand Kaufmann

$$\frac{e}{m_0} = 1{,}875 \cdot 10^7,$$

während S. Simon im Jahre 1899 den hiervon sehr wenig abweichenden Wert

$$\frac{e}{m_0} = 1{,}865 \cdot 10^7$$

für Kathodenstrahlen gefunden hatte.

Es ist von Interesse, diesen Wert mit dem aus der Elektrolyse bekannten Verhältnis von Masse und Elektrizitätsmenge zu vergleichen.

Um 1 g Wasserstoff abzuscheiden, ist eine Elektrizitätsmenge von 9654 absoluten elektromagnetischen Einheiten erforderlich. Vergleicht man diese Zahl mit der von Kaufmann gefundenen, so ergibt sich, daß das Elektron pro Masseneinheit eine etwa zweitausendmal so große Elektrizitätsmenge mit sich führt.

Hier drängt sich die wichtige Frage auf, ob der hohe Wert von $\frac{e}{m}$ von der Größe der Ladung des Elektrons oder von der Kleinheit der Masse herrührt, und die weitere Frage, wie groß ist die Ladung und wie groß die Masse eines Elektrons. J. J. Thomson unternahm in den Jahren 1898—1901 Untersuchungen zur Lösung dieses Problems. Er gründete seine Methoden auf die von C. T. R. Wilson entdeckte Erscheinung, daß geladene Partikel in übersättigtem Wasserdampf Nebel erzeugen. Durch höchst sinnreiche Voruntersuchungen hatte er nachgewiesen, daß jedes einzelne Teilchen einen Kern zur Bildung eines Nebelbläschens liefert, daß also die Zahl der Nebelbläschen gleich ist der Zahl der geladenen Partikel. Die Zahl der Nebeltröpfchen kann man messen und hierdurch die Zahl n der in einem gewissen Raume befindlichen Elektronen feststellen. Bringt man mit den Polen einer Batterie verbundene Elektroden in den Raum, so wird eine Elektrizitätsleitung stattfinden, und zwar werden die Elektronen mit um so größerer Geschwindigkeit u sich bewegen, je größer die Potentialdifferenz ist. Bringt man die Elektroden so an, daß sämtliche Elektronen an der Stromerzeugung teilnehmen — indem man die Elektroden etwa zu Endflächen eines Zylinders macht —, so ist der elektrische Strom

$$J = neu.$$

u läßt sich als Funktion der Potentialdifferenz der Elektronen ermitteln. Da auch J und n leicht gemessen werden können, so ist auch e bekannt.

J. J. Thomson[1]) hat bei Verwendung der vom Radium herrührenden Strahlen den Wert

$$e = 1{,}1 \cdot 10^{-20}$$

1) J. J. Thomson, Phil. Mag., März 1903.

absoluter elektromagnetischer Einheiten gefunden. Fast genau denselben Wert fand H. A. Wilson[1]) bei Verwendung von Ionen, welche durch Röntgenstrahlen erzeugt waren.

Auf Grund der kinetischen Gastheorie kann man bekanntlich die Anzahl der Moleküle und deshalb auch der Ionen berechnen, welche in einem Kubikzentimeter Wasserstoffgas bei 0° und Atmosphärendruck vorhanden ist; und da man außerdem weiß, welche Elektrizitätsmenge bei der Elektrolyse zur Freisetzung der Gasmenge nötig war, so kennt man die Ladung eines Ions Wasserstoff. Vergleicht man damit obigen Wert, so findet man, daß es derselbe ist. Hieraus schließt man, daß die Masse eines Elektrons etwa zweitausendmal kleiner ist als diejenige eines Wasserstoffions. Unter Masse ist hier diejenige eines langsam sich bewegenden Elektrons verstanden. —

Es läge nahe, den Einblick, welchen uns das Studium der Gasentladungen und der radioaktiven Substanzen in die Struktur der Materie gewährt hat, zu einer Vertiefung unserer Vorstellungen über elektrolytische Erscheinungen zu verwerten.

Es läßt sich in der Tat voraussehen, daß eine weitere Entwickelung der Elektronentheorie eine Befruchtung des Gebietes der Lösungstheorie, im besonderen eine Behebung der mannigfaltigen Schwierigkeiten, welche einer allgemeineren Annahme der elektrolytischen Dissoziation noch entgegenstehen — vielleicht unter stärkerer Heranziehung der Hydratation —, herbeiführen wird. Nennenswerte Versuche in dieser Richtung sind aber bisher dem Verfasser nicht bekannt geworden.

Es sei hier kurz angedeutet, wie man sich den Modus operandi bei elektrolytischen Vorgängen zu denken hat. Wir waren zu der Auffassung gelangt, daß das im allgemeinen beweglichere negative Elementarquantum kein materielles Substrat besitze und daß das Körperatom an und für sich positiv elektrisch sei. Hierbei lassen wir aber die Möglichkeit offen,

1) H. A. Wilson, Phil. Mag., April 1903.

daß auch die Masse des positiven Körperatoms im letzten Grunde elektromagnetischer Natur sei. Der Transport der Elektrizität in stromdurchflossenen Leitern wird durch die negativen Elektronen vermittelt.

Vom Standpunkte der Arrheniusschen Theorie wäre dann ein positives Ion, wie Kalium, ein Körperatom, von welchem das Elektron getrennt ist. Ein negatives Ion, wie Chlor, hingegen ein Körperatom, welches zwei Elektronen an sich gekettet hat. Der Umstand, daß dieselbe Elektrizitätsmenge stets dieselbe Menge eines Anions frei macht, dagegen verschiedene Mengen eines Kations, wenn dieses mit verschiedener Wertigkeit sich mit dem Anion verbinden kann, beweist, daß die Anzahl der Elektronen, welche sich mit dem Körperatom der Nichtmetalle vereinigen können, unabänderlich bestimmt ist. Daß dies für Metalle nicht zutrifft, scheint mir in Zusammenhang mit dem sonstigen Verhalten der Metalle zu stehen, vor allem mit ihrer Fähigkeit, elektrische Ladungen aufzunehmen, d. h. einen Überschuß und auch ein Minus an Elektronen aufzuweisen.

Schließt man eine Wasserstoff-Sauerstoff-Kette, so findet die Stromerzeugung in der Weise statt, daß das Wasserstoffatom an der Elektrode das mit ihm verbundene Elektron an die Elektrode abgibt. Aus der Elektrode hervor bewegt sich letzteres dann durch den Schließungsdraht nach der Sauerstoffelektrode, um sich dort mit einem Sauerstoffatom zu verbinden. Der den Elektrolyten durchfließende Strom gleicht die durch die Anhäufung von Ionen an den Elektroden entstehende Spannung aus. Er wird vermittelt durch die Wanderung der Ionen, welche gemäß den Vorstellungen der Dissoziationstheorie erfolgt.

§ 7.

Der Temperaturkoeffizient der Strahlung.

Die bedeutenden und glänzenden Untersuchungen Sir William Ramsays über den Charakter des Emanationsgases und des Zersetzungsvorganges, bei welchem sich Helium und

ein noch unbekannter fester Körper entwickeln, legen es nahe, an diesen Umwandlungsprozeß thermodynamische Betrachtungen anzuknüpfen. Fassen wir diejenigen Ergebnisse der Forschung kurz zusammen, welche hier von Belang sind. Die Strahlung, welche bei der Zersetzung der Radiumsalze auftritt, rührt von dem gasförmigen Produkte dieses Prozesses, der Emanation her. Die Emanation, welche sich als einatomiges Gas erwiesen hat, liefert unter Wärmeentwickelung einen Betrag von gewöhnlicher kinetischer und elektromagnetischer Energie, welcher bei weitem den Hauptbetrag der gesamten Energieänderung ausmacht (etwa $\frac{3}{4}$). Die kinetische Energie, d. h. die Durchdringungsfähigkeit der Strahlen, nimmt mit steigender Temperatur stark ab, wie von Curie festgestellt wurde.

Faßt man die erzeugte kinetische Energie einschließlich der elektromagnetischen als eine den Prozeß begleitende Änderung der freien Energie auf — wir denken uns den Prozeß isotherm und reversibel verlaufend —, so wäre die gleichzeitige Wärmeentwickelung vergleichbar der von einem umkehrbaren elektrochemischen Prozeß bei konstanter Temperatur entwickelten Wärme.

Bezeichnen wir daher die bei der Zersetzung von einem Gramm Emanationsgas eintretende Änderung der freien Energie, d. h. die erzeugte kinetische Energie, mit W und die hierbei entwickelte umkehrbare Wärme mit q, so ist

$$q = - T\frac{dW}{dT}.$$

Da q enorm groß ist, so muß die kinetische Energie, d. h. die Geschwindigkeit der Strahlen, stark mit der Temperatur abnehmen. Dies steht mit der Curieschen Beobachtung in guter Übereinstimmung. Wenn das Emanationsgas sich umwandelt, ist auch die Änderung der inneren Energie sehr groß. Man mißt diese Änderung, indem man eine bestimmte Menge Gas in einem Bleigefäße mit sehr dicken Wänden sich zersetzen läßt und die Wärmeabgabe kalorimetrisch bestimmt.

Man darf nach Analogie physikalisch-chemischer Prozesse schließen, daß die Affinität des Verwandlungsprozesses mit der

Temperatur so stark abnimmt, daß bei hohen Temperaturen eine Umkehr der Reaktion zu erwarten wäre. Es müßte sich also aus Helium und dem als Anflug sich absetzenden Körper Emanationsgas bilden. (Vgl. Bucherer, Verhandl. der Niederrh. Ges. 11. Juni 1904.) Es braucht wohl nicht besonders betont zu werden, daß unsere Schlüsse hinfällig werden, wenn die bei freier Strahlung auftretende Wärme sich als irreversible erweisen sollte.

§ 8.
Rotierende Ladungen.

Die Untersuchung des Feldes bewegter Ladungen hat sich bisher auf geradlinig sich bewegende Ladungen beschränkt. Bevor wir die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes beliebig sich bewegender Elektronen ableiten, wollen wir den Fall rotierender Ladungen[1]) behandeln und zwar wiederum auf Grund der Lorentzschen Gleichungen. Rotiert eine Ladung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit, so wird, wenn der stationäre Zustand eingetreten ist, das die Ladung umgebende Feld wie ein starrer Körper rotieren. Die Geschwindigkeit erreiche in keinem Punkte des geladenen Körpers die Lichtgeschwindigkeit.

Die Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes sind wieder

$$4\pi v^2 \mathfrak{D} = -\frac{d\mathfrak{H}}{dt}, \tag{1}$$

$$\operatorname{curl} \mathfrak{H} = 4\pi \frac{d\mathfrak{D}}{dt} + 4\pi \varrho \mathfrak{u}. \tag{2}$$

Faßt man einen bestimmten Punkt des rotierenden Feldes ins Auge, für welchen man die magnetische Kraft und die elektrische Verschiebung berechnen will, so bieten sich für

1) Dieses Problem ist in Bucherer, Vektoranalysis pp. 61—66 auf Grund der Maxwellschen Theorie behandelt. Leider sind die Entwickelungen durch Druckfehler entstellt. Die Verwendung der zylindrischen Koordinaten verdanke ich einer gütigen Mitteilung meines Freundes G. F. C. Searle.

die Hauptrichtungen, nach welchen man diese Vektoren zerlegen kann, folgende Richtungen an. Erstens die in dem Punkte bestehende Bewegungsrichtung, eine Richtung, welche natürlich für benachbarte Punkte im allgemeinen variiert; zweitens die radiale d. h. zu der Rotationsachse und zur Bewegungsrichtung senkrechte Richtung; drittens die der Rotationsachse parallele Richtung der vektoriellen Winkelgeschwindigkeit. In der Figur sind diese Richtungen mit $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{w}$ bezeichnet.

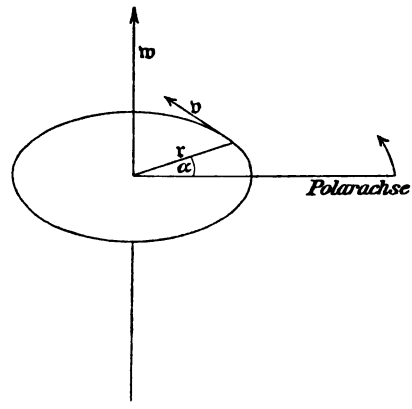

Fig. 2.

Wir wählen nun die Grundvektoren so, daß $\mathfrak{v}$ mit der $\mathfrak{i}$-Richtung, $\mathfrak{r}$ mit der $\mathfrak{j}$- und $\mathfrak{w}$ mit der $\mathfrak{k}$-Richtung zusammenfällt. Im Gegensatz zu der gewöhnlichen Anwendung der Grundvektoren variiert die $\mathfrak{i}$- und $\mathfrak{j}$-Richtung je nach dem ins Auge gefaßten Punkte.

Die Formulierung der Bedingung der solenoidalen Verteilung der Vektoren $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{D}$ im Felde der rotierenden Ladung nimmt infolgedessen eine andere Form an. Bezeichnen wir nämlich die zylindrischen Koordinaten eines beliebigen Punktes mit α, r und z, wo wir α von der im Körper festliegenden Polarachse an zählen, so gilt für die Verschiebung und die magnetische Kraft[1])

$$(3) \qquad \operatorname{div}\mathfrak{D} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rD_1) + \frac{1}{r}\frac{\partial D_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial D_3}{\partial z} = 0,$$

$$(4) \qquad \operatorname{div}\mathfrak{H} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_1) + \frac{1}{r}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial H_3}{\partial z} = 0.$$

1) Allgemeines über Koordinatentransformationen siehe H. Weber, Partielle Differentialgleichungen, Bd. I, p. 94—106.

Der curl von $\mathfrak{D}$ nimmt die Form an

$$(5)\quad \begin{cases} (\operatorname{curl}\mathfrak{D})_{\mathfrak{i}} = \mathfrak{i}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial D_3}{\partial \alpha} - \frac{\partial D_2}{\partial z}\right), \\ (\operatorname{curl}\mathfrak{D})_{\mathfrak{j}} = \mathfrak{j}\left(\frac{\partial D_1}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial D_3}{\partial r}\right), \\ (\operatorname{curl}\mathfrak{D})_{\mathfrak{k}} = \mathfrak{k}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}(rD_2) - \frac{1}{r}\frac{\partial D_1}{\partial \alpha}\right). \end{cases}$$

Der curl von $\mathfrak{H}$ hat eine ganz analoge Form.

Wir kehren nun zu den Differentialgleichungen des Feldes zurück. Da das Feld sich wie ein starrer Körper bewegt, so ist

$$(6)\quad \frac{d\mathfrak{H}}{dt} = -(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{H}.$$

$\mathfrak{v}$ ist die in dem betreffenden Punkte bestehende Geschwindigkeit. Da nun der Tensor dieser Geschwindigkeit rw ist und die Richtung die $\mathfrak{j}$-Richtung, so wird

$$(7)\quad \frac{d\mathfrak{H}}{dt} = -(\mathfrak{j}rw\nabla)\mathfrak{H}.$$

Ebenso ist

$$\frac{d\mathfrak{D}}{dt} = -(\mathfrak{j}wr\nabla)\mathfrak{D}.$$

Es nehmen dann die Hauptgleichungen des Feldes die Form an

$$(8)\quad \operatorname{curl}\mathfrak{H} = 4\pi(\mathfrak{j}wr\nabla)\mathfrak{D} + 4\pi\varrho\mathfrak{v},$$

$$(9)\quad \operatorname{curl}\mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi v^2}\operatorname{curl}\mathfrak{V}\mathfrak{H}\mathfrak{j}rw.$$

Wir entwickeln die linken Seiten der Gleichungen und erhalten unter Berücksichtigung der solenoidalen Verteilung von $\mathfrak{H}$

$$(10)\quad \operatorname{curl}\mathfrak{H} = -4\pi\operatorname{curl}\mathfrak{V}\mathfrak{j}rw\mathfrak{D}.$$

$$(11)\quad \operatorname{curl}\mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi v^2}(\mathfrak{j}wr\nabla)\mathfrak{H}.$$

Durch Integration gehen diese Gleichungen über in

$$(12)\quad \mathfrak{H} = 4\pi wr\mathfrak{V}\mathfrak{j}\mathfrak{D} - \nabla\varphi,$$

$$(13)\quad \mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi v^2}wr\mathfrak{V}\mathfrak{H}\mathfrak{j} - \nabla V.$$

Die Vektoren $-\nabla\varphi$ und $-\nabla V$ spielen hier die Rolle von Integrationskonstanten. Führt man die Multiplikation des Vektorproduktes aus, so schreibt sich

$$\mathfrak{H} = 4\pi w r\,(\mathfrak{i}D_3 - \mathfrak{k}D_1)\,\nabla\varphi,$$
$$\mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi v^2} w r\,(-\mathfrak{i}H_1 + \mathfrak{k}H_3) - \nabla V.$$

Setzt man den Wert von $\mathfrak{D}$ in die Gleichung für $\mathfrak{H}$ ein, so wird zunächst

$$(14)\qquad \mathfrak{H} = \frac{w^2r^2}{v^2}\mathrm{V}\mathfrak{j}\mathrm{V}\mathfrak{H}\mathfrak{j} - 4\pi w r\mathrm{V}\mathfrak{j}\nabla V - \nabla\varphi$$
$$= \frac{w^2r^2}{v^2}(\mathfrak{i}H_1 + \mathfrak{k}H_3) - 4\pi w r\mathfrak{i}\frac{\partial V}{\partial z} + 4\pi w r\mathfrak{k}\frac{\partial V}{\partial r} - \nabla\varphi.$$

Für $1 - \frac{w^2r^2}{v^2}$ schreiben wir s.

Dann sind die Komponenten von $\mathfrak{H}$ in den $\mathfrak{i}$-, $\mathfrak{j}$-, $\mathfrak{k}$-Richtungen

$$(15)\qquad \begin{cases} H_1 s = -4\pi r w\dfrac{\partial V}{\partial z} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial r}, \\ H_2 = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\alpha}, \\ H_3 = 4\pi r w\dfrac{\partial V}{\partial r} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}. \end{cases}$$

In analoger Weise erhält man die Komponenten von $\mathfrak{D}$, wenn man in Gleichung (13) $\mathfrak{H}$ substituiert. Es folgt

$$\mathfrak{D} = \frac{w^2r^2}{v^2}\mathrm{V}(\mathrm{V}\mathfrak{j}\mathfrak{D})\mathfrak{j} - \mathrm{V}\nabla\varphi\mathfrak{j} - \nabla V$$
$$= \frac{w^2r^2}{v^2}(\mathfrak{i}D_1 + \mathfrak{k}D_3) + \frac{wr}{4\pi v^2}\left(\mathfrak{i}\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \mathfrak{k}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) - \nabla V.$$

Also

$$(16)\qquad \begin{cases} D_1 s = -\dfrac{\partial V}{\partial r} + \dfrac{wr}{4\pi v^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}, \\ D_2 = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial\alpha}, \\ D_3 s = -\dfrac{\partial V}{\partial z} - \dfrac{wr}{4\pi v^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}. \end{cases}$$

Man erkennt, wie kompliziert die Gleichungen für die magnetische Kraft und die elektrische Verschiebung sind. Bei der geradlinigen gleichförmigen Bewegung konnten wir die Integrationskonstante $-\nabla\varphi$ Null setzen, wodurch die Gleichungen bedeutend vereinfacht wurden. Das ist bei rotierenden

72

(5

$$(19)\qquad \begin{cases} H_1 s = -4\pi r w \dfrac{\partial V}{\partial z} = 0, \\ H_2 = 0, \\ H_3 s = 4\pi r w \dfrac{\partial V}{\partial r}. \end{cases}$$

$$(20)\qquad \begin{cases} D_1 s = -\dfrac{\partial V}{\partial r}, \\ D_2 = 0, \\ D_3 s = -\dfrac{\partial V}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Da $\mathfrak{D}$ solenoidal verteilt ist, so muß die Gleichung bestehen

$$\operatorname{div}\mathfrak{D} = 0 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{s}\frac{\partial V}{\partial r}\right).$$

Die Integration liefert

$$(21)\qquad \frac{r}{s}\frac{\partial V}{\partial r} = C_1,$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = C_1\left(\frac{1}{r} - \frac{r w^2}{v^2}\right).$$

Zur Bestimmung der Konstanten C benutzen wir die Beziehung zwischen der an einem Punkte einer geladenen Fläche bestehenden Verschiebung und der Flächendichte der Elektrizität. Die Verschiebung hat in einem beliebigen der Zylinderfläche unendlich benachbarten Punkte den Wert

$$-\frac{1}{s}\frac{\partial V}{\partial r}.$$

Bezeichnet man nun die Flächendichte mit σ, so wird

$$-\frac{1}{s}\frac{\partial V}{\partial r} = \sigma.$$

σ ist in elektromagnetischen Einheiten gemessen.

Ist die Länge des Zylinders l, die Ladung in elektromagnetischen absoluten Einheiten q und der Radius des Querschnittes ϱ, so ist

$$(22)\qquad \sigma = \frac{q}{2\pi\varrho l}.$$

Dann wird

$$-\frac{1}{s}\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=\varrho} = \frac{q}{2\pi\varrho l}$$

und

$$\frac{\varrho}{s}\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{\varrho} = \frac{q}{2\pi l} = C.$$

Dann folgt

$$\text{(23)} \qquad \begin{cases} D_1 = \frac{q}{2\pi l r}, \\ D_2 = 0, \\ D_3 = 0. \end{cases}$$

$$\text{(24)} \qquad \begin{cases} H_1 = 0, \\ H_2 = 0, \\ H_3 = \frac{2wq}{l}. \end{cases}$$

In diesen Gleichungen ist der Ausdruck für die magnetische Kraft bemerkenswert. Es ist die magnetische Kraft in der Umgebung eines sehr langen rotierenden Zylinders konstant. Sie ist parallel der Rotationsachse. Es ließe sich vielleicht an einem solchen rotierenden Zylinder die magnetische Wirkung von Konvektionsströmen bequemer nachweisen als bei rotierenden Scheiben.

Beiläufig sei noch bemerkt, daß sich auch Fälle denken lassen, in welchen

$$\text{(25)} \qquad \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Läßt man nämlich zwei Ebenen, von welchen die eine positiv, die andere negativ geladen ist, rotieren, so ist ein solcher Fall realisiert. Die Lösung ist sehr einfach, indem das Potential V die Form annimmt

$$V = C_1 \alpha + C_2.$$

§ 9.

Eine Umformung der Grundgleichungen.

Man kann den Grundgleichungen der Lorentzschen Theorie eine Form geben[1]), welche bei vielen Anwendungen große Vereinfachungen gestattet.

Wir hatten die Gleichungen

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{D} = -\frac{1}{4\pi v^2} \frac{d\mathfrak{H}}{dt},$$

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{H} = 4\pi \frac{d\mathfrak{D}}{dt} + 4\pi \varrho \mathfrak{u}.$$

1) Siehe Bucherer, Elemente der Vektoranalysis p. 72—75.

Für Raumteile, welche frei von Ladungen sind, ist

$$\text{div}\,\mathfrak{D} = 0. \tag{3}$$

Ist hingegen Elektrizität räumlich mit einer Dichte ϱ verteilt, so ist

$$\text{div}\,\mathfrak{D} = \varrho. \tag{4}$$

ϱ sei in absoluten elektromagnetischen Einheiten gemessen. Da $\mathfrak{H}$ solenoidal verteilt ist, so wird dieser Bedingung genügt, wenn wir die Hilfsgröße $\mathfrak{A}$ einführen, so daß

$$\mathfrak{H} = \text{curl}\,\mathfrak{A}, \tag{5}$$

also

$$\text{curl}\,\mathfrak{H} = \nabla\,\text{div}\,\mathfrak{A} - \nabla^2\mathfrak{A}. \tag{6}$$

Dann folgt aus Gleichung (2)

$$-\,\text{curl}\,\frac{d\mathfrak{A}}{dt} = 4\pi v^2\,\text{curl}\,\mathfrak{D} \tag{7}$$

oder integriert

$$4\pi v^2\mathfrak{D} = -\,\frac{d\mathfrak{A}}{dt} - \nabla\varphi. \tag{8}$$

$\nabla\varphi$ ist eine Integrationskonstante, welche, wie man erkennt, der Bedingung genügt

$$\text{curl}\,(\nabla\varphi) = 0.$$

Wir differentiieren beide Seiten der Gleichung (8) nach t und erhalten

$$4\pi v^2\frac{d\mathfrak{D}}{dt} = -\,\frac{1}{v^2}\frac{d^2\mathfrak{A}}{dt^2} - \frac{1}{v^2}\frac{d}{dt}\nabla\varphi. \tag{9}$$

Setzt man diesen Wert von $4\pi\frac{d\mathfrak{D}}{dt}$ in die Gleichung für den curl $\mathfrak{H}$ ein, so folgt

$$\text{curl}\,\mathfrak{H} = \nabla\,\text{div}\,\mathfrak{A} - \nabla^2\mathfrak{A} = -\,\frac{1}{v^2}\frac{d^2\mathfrak{A}}{dt^2} - \frac{1}{v^2}\frac{d}{dt}\nabla\varphi + 4\pi\varrho\mathfrak{u}. \tag{10}$$

Wir knüpfen nun an die Hilfsgröße $\mathfrak{A}$ die weitere Bedingung

$$v^2\nabla\mathfrak{A} + \frac{d\varphi}{dt} = 0, \tag{11}$$

also auch

$$\nabla\,\text{div}\,\mathfrak{A} = -\,\frac{1}{v^2}\frac{d}{dt}\nabla\varphi. \tag{12}$$

Dann schreibt sich die Gleichung (10)

$$\frac{1}{v^2}\frac{d^2\mathfrak{A}}{dt^2} - \nabla^2\mathfrak{A} = 4\pi\varrho\mathfrak{u}. \tag{13}$$

Eine analoge Gleichung läßt sich für φ ableiten. Es ist für Raumteile, wo eine elektrische Dichte ϱ besteht

$$4\pi v^2 \operatorname{div}\mathfrak{D} = 4\pi v^2\varrho.$$

Daher gemäß Gleichung (8)

$$4\pi v^2\varrho = -\frac{d}{dt}\nabla\mathfrak{A} - \nabla^2\varphi. \tag{14}$$

Unter Benutzung der bereits angewandten Beziehung

$$v^2\nabla\mathfrak{A} = -\frac{d\varphi}{dt} \quad \text{bzw.} \quad \frac{d}{dt}\nabla\mathfrak{A} = -\frac{1}{v^2}\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

kann man diese Gleichung auch schreiben

$$\frac{1}{v^2}\frac{d^2\varphi}{dt^2} - \nabla^2\varphi = 4\pi\varrho v^2.$$

Wir haben nunmehr zur Bestimmung von $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{H}$ folgendes System von Gleichungen:

$$\text{(I)} \qquad \frac{1}{v^2}\frac{d^2\mathfrak{A}}{dt^2} - \nabla^2\mathfrak{A} = 4\pi\varrho\mathfrak{u},$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{1}{v^2}\frac{d^2\varphi}{dt^2} - \nabla^2\varphi = 4\pi\varrho v^2,$$

$$\text{(III)} \qquad \mathfrak{H} = \operatorname{curl}\mathfrak{A},$$

$$\text{(IV)} \qquad \mathfrak{D} = -\frac{1}{4\pi v^2}\frac{d\mathfrak{A}}{dt} - \frac{1}{4\pi v^2}\nabla\varphi.$$

Die Gleichungen (I) und (II) lassen sich nun noch weiter umformen. Dies geschah zuerst von H. A. Lorentz und von Poincaré. Der Gedanke, welcher dieser Umformung zugrunde liegt, ist folgender.

Faßt man einen bestimmten Punkt P zur Zeit t_0 in einem elektromagnetischen Felde ins Auge, so wird die Erregung, welche dort besteht, zurückzuführen sein auf eine mit Lichtgeschwindigkeit ausgegangene, durch die Bewegung der Elektronen verursachte Störung des Äthers, welche sich zu einer früheren Zeit t von einem oder mehreren Elektronen aus im

Raume ausbreitete. Das betreffende Elektron war dann zur Zeit t eine Strecke

$$r = v(t_0 - t) \tag{15}$$

von P entfernt.

Daher ist für irgendeine Größe, welche mit Lichtgeschwindigkeit in den Raum eilt, also auch für die zur Zeit t_0 in P bestehenden Werte von φ und $\mathfrak{A}$ in den Gleichungen (I) und (II)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{dr}{dt} = -v\frac{\partial \varphi}{\partial r},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(-v\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)\frac{dr}{dt} = v^2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}.$$

In derselben Weise findet man

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial r^2}.$$

Infolgedessen kann man die Gleichungen (I) und (II) auch schreiben

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial r^2} - \nabla^2 \mathfrak{A} = 4\pi\varrho\mathfrak{u}, \tag{Ia}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \nabla^2 \varphi = 4\pi\varrho v^2. \tag{IIa}$$

Diese Gleichungen werden schließlich mittels eines von Beltrami benutzten Hilfssatzes umgeformt. Bezeichnet man nämlich den Wert von φ im Punkte P zur Zeit t_0 mit φ_0, so ist

$$4\pi\varphi_0 = \int \frac{\mathfrak{r}_1}{r^2}\varphi\, d\mathfrak{g} + \int \frac{1}{r}\nabla\varphi\, d\mathfrak{g} - \int \frac{\mathfrak{r}_1}{r}(\mathfrak{r}_1\nabla)\varphi\, d\mathfrak{g} + \int \frac{1}{r}(\mathfrak{r}_1\nabla)^2\varphi\, d\tau - \int \frac{1}{r}\nabla^2\varphi\, d\tau. \tag{16}$$

Hier bedeutet $\mathfrak{r}_1\nabla$ eine Differentiation bei unveränderten Koordinaten von P, während ∇ eine Differentiation nach $\mathfrak{r}_1$ bzw. x, y, z bei konstantem r bedeutet.

Die Oberflächenintegrale sind auf eine beliebige das System der Elektronen einschließende Fläche zu erstrecken und die Volumenintegrale auf die Elemente des von der Fläche ein-

geschlossenen Raumes. [illegible]

(11) [illegible]

[illegible]

einem sich bewegenden Elektron herrühren. Es sind dann die Anteile zu summieren, welche von den einzelnen Volumenelementen des Elektrons herrühren. Zur Zeit t_0 befinde sich das Elektron im Punkte O_0 (Fig. 3).

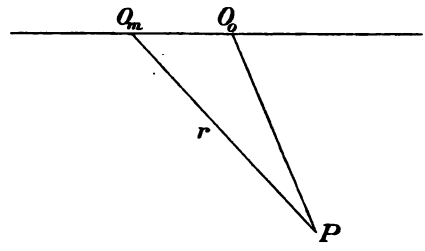

Fig. 3.

Dann ist die Erregung, welche von dem im Schwerpunkte des Elektrons gelegenen Volumenelemente in P_0 zur Zeit t eintrifft, zu einer früheren Zeit t_m von diesem Volumenelemente ausgegangen. Zur Zeit t befand sich aber der Schwerpunkt im Punkte O_m, so daß

$$r = v(t - t_m). \tag{19}$$

Diejenigen Volumenelemente, welche dem Punkte P näher liegen als der Schwerpunkt, haben nun in Zeitpunkten, welche größer sind als t_m, ihre zur Zeit t_0 in P eintreffenden Erregungen ausgesandt. Hingegen haben Volumenelemente, welche dem Punkte P ferner liegen, ihre Erregungen früher als t_m ausgesandt. In diesen Zeitpunkten war aber der Schwerpunkt nicht in O, sondern vor oder hinter O. Mit anderen Worten, es ist jedem Volumenelemente des Elektrons im allgemeinen eine verschiedene Zeit und ein verschiedener Abstand des Schwerpunktes von P zugeordnet, wenn diese Zuordnungen auch sehr wenig voneinander verschieden sind wegen der sehr kleinen Dimensionen des Elektrons. Wir setzen voraus, daß die den Volumenelementen zugeordneten Zeiten nicht so weit auseinander liegen, daß der Bewegungszustand des Elektrons sich innerhalb derselben merklich geändert habe. — Wir wollen an der Hand der Figur die nunmehr in Betracht kommenden Beziehungen ableiten. Wir wollen die Größen $\mathfrak{A}$ und φ im Punkte P zur Zeit t finden, welche durch die Bewegung eines Elektrons bedingt sind. Denjenigen elementaren Anteil, welchen zur Zeit t das

im Schwerpunkte gelegene Volumenelement des Elektrons zu $\mathfrak{A}$ und φ beiträgt, habe das Elektron zur Zeit t_m erzeugt. Zu dieser Zeit befand sich das Elektron in O_m.

Dann ist

$$O_m P = r = v(t - t_m).$$

Wir denken uns das Elektron durch eine Schar unendlich benachbarter Kugelflächen, deren Mittelpunkt in P sei, in scheibenförmige Volumenelemente geteilt. Die Schnittflächen können wegen der kleinen Dimensionen des Elektrons als Ebenen aufgefaßt werden. Der Abstand einer beliebig herausgegriffenen Scheibe vom Schwerpunkte O_m sei d. In der Figur ist der Abstand r_1 dieser Scheibe von P größer als r. Die Zeit, welche die von dieser Scheibe herrührende Erregung gebraucht, um nach P zu gelangen, ist $t - t_1$. Dann ist

$$r_1 - r = d = v(t_m - t_1).$$

Zur Zeit t_1 war der Schwerpunkt des Elektrons in O_1, und die Entfernung $O_1 O_m$ ist, da das Elektron sich mit der Geschwindigkeit u bewegt,

$$u(t_m - t_1).$$

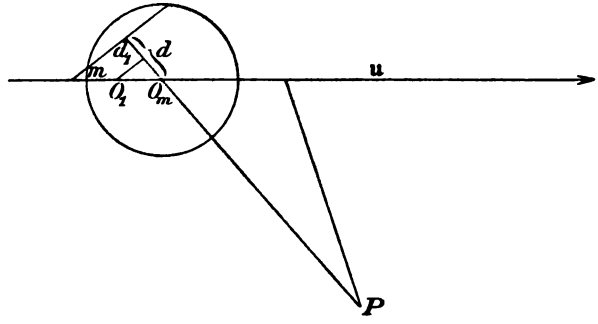

Fig. 4.

Der Abstand der Scheibe von O_1 sei d_1. Nach der Figur bestehen dann folgende Beziehungen

$$d_1 : d = m : [u(t_m - t_1) + m],$$
$$-\cos(\mathfrak{u}, \mathfrak{r}) = d_1 : m.$$

Folglich unter Beachtung des Wertes von d

$$d_1 : d = 1 + \frac{u}{v}\cos(ur),$$

$$d_1 = d\left(1 + \frac{u}{v}\cos(ur)\right).$$

Aus dieser Gleichung dürfen wir schließen, daß bei Ausführung der durch (Ib) und (IIb) vorgeschriebenen Integrationen so verfahren werden darf, als ob das Elektron in O_m stillstände, vorausgesetzt, daß man seine Dimensionen im Verhältnis

$$\left(1 + \frac{u}{v}\cos(ur)\right) : 1$$

parallel r verändert.

Infolgedessen erhalten die Gleichungen (Ib) und (IIb), wenn wir sie auf das Elektron anwenden, die Form

$$\varphi = \left(\frac{1}{r\left(1 + \frac{u}{v}\cos(ur)\right)}\int \varrho v^2 d\tau\right)_{t_m = t - \frac{r}{v}},$$

$$\mathfrak{A} = \left(\frac{1}{r\left(1 + \frac{u}{v}\cos(ur)\right)}\int \varrho\, u\, d\tau\right)_{t_m = t - \frac{r}{v}}.$$

Führt man die Integration aus, so folgt, wenn die Ladung des Elektrons q ist,

(Ic) $$\varphi = \frac{qv^2}{r\left(1 + \frac{u}{v}\cos(ur)\right)_{t_m = t - \frac{r}{v}}},$$

(IIc) $$\mathfrak{A} = \frac{qu}{r\left(1 + \frac{u}{v}\cos(ur)\right)_{t_m = t - \frac{r}{v}}}.$$

Gemäß der Ableitung bezeichnet also r den Abstand, den der Schwerpunkt des Elektrons zur Zeit t_m hatte, d. h. zu derjenigen Zeit, wo die in P eingetroffene Erregung das im Schwerpunkte gelegene Volumenelement verlassen hatte. — Will man die Wirkung mehrerer Elektronen berechnen, so sind die von den einzelnen Elektronen herrührenden Anteile

nach den vorstehenden Gleichungen zu berechnen und zu addieren. Dann findet man $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{D}$ nach Gleichungen (III) und (IV).

Es seien zwei Beispiele zur Anwendung angeführt.

1. Das Feld eines sich geradlinig bewegenden Elektrons.

Das Elektron bewege sich in Richtung der zunehmenden x. Zur Zeit t_0 befinde es sich im Koordinatenanfangspunkte O_0. Die in diesem Zeitpunkte in P bestehenden Feldstärken seien zu bestimmen. Die zur Zeit t_0 in P bestehende Erregung hat den Schwerpunkt des Elektrons zur Zeit t verlassen, als das Elektron noch in O war. Dann ist nach der Figur

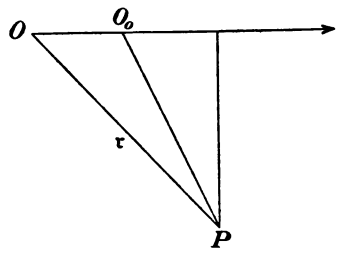

Fig. 5.

$$r^2 = [x + (t_0 - t)u]^2 + y^2 + z^2.$$

Es ist aber

$$t_0 - t = \frac{r}{v}.$$

Dann folgt nach Lösung der quadratischen Gleichung, wenn wieder $s = 1 - \frac{u^2}{v^2}$ gesetzt wird,

$$sr = \frac{u}{v}x + \sqrt{(y^2 + z^2)s + x^2}.$$

Es ist ferner

$$-\cos(ur) = \frac{x}{r} + \frac{u}{v}.$$

Daher

$$r[1 + \cos(ur)] = sr - \frac{u}{v}x = \sqrt{(y^2 + z^2)s + x^2}.$$

Dann schreiben sich die Werte von φ und $\mathfrak{A}$ im Punkte P

$$\varphi = \frac{qv^2}{\sqrt{(y^2+z^2)s+x^2}},$$

$$\mathfrak{A} = \frac{uq}{\sqrt{(y^2+z^2)s+x^2}}.$$

Gemäß den Gleichungen (III) und (IV) ist

$$\text{(III)} \qquad \mathfrak{H} = \operatorname{curl} \mathfrak{A},$$

$$\text{(IV)} \qquad \mathfrak{D} = -\frac{1}{4\pi v^2}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} - \frac{1}{4\pi v^2}\nabla \varphi.$$

$\mathfrak{A}$ hat nur eine Komponente in der i-Richtung, d. h. $A_2 = A_3 = 0$. Dann wird der Curl von $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{j}\frac{\partial A_1}{\partial z} - \mathfrak{k}\frac{\partial A_1}{\partial y}.$$

Also unter Benutzung der vorstehenden Gleichungen

$$\begin{cases} H_1 = 0, \\ H_2 = -\dfrac{uzqs}{[(y^2+z^2)s+x^2]^{\frac{3}{2}}}, \\ H_3 = \dfrac{uyqs}{[(y^2+z^2)s+x^2]^{\frac{3}{2}}}. \end{cases}$$

Zur Berechnung von $\mathfrak{D}$ benutzen wir (IV). Wir wollen jetzt annehmen, daß das Koordinatensystem mit dem Elektron fest verbunden sei. Dann ist, da das Feld sich wie ein starrer Körper bewegt,

$$-\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = u\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x} = \mathfrak{u}\frac{\partial A}{\partial x}.$$

Dann folgt

$$\begin{cases} D_1 = \dfrac{qxs}{4\pi[x^2+s(y^2+z^2)]^{\frac{3}{2}}}, \\ D_2 = \dfrac{qys}{4\pi[x^2+s(y^2+z^2)]^{\frac{3}{2}}}, \\ D_3 = \dfrac{qzs}{4\pi[x^2+s(y^2+z^2)]^{\frac{3}{2}}}. \end{cases}$$

Vergleicht man die für $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{D}$ gefundenen Werte mit den bereits früher auf andere Weise gefundenen [siehe Gleichungen (47) und (48)], so erkennt man die Übereinstimmung.

§ 10.

Eine weitere Umformung.

Eine höchst beachtenswerte Form nehmen die Gleichungen (Ic) und (IIc) an, wenn man nach dem Vorgange Heavisides[1]), welchem man wichtige Arbeiten über das Feld beliebig sich bewegender Elektronen verdankt, den Nenner in den betreffenden Ausdrücken als Funktion der Zeit t_m darstellt. Es ist nun zweckmäßig, gleichzeitig eine Änderung bezüglich des Radiusvektors $\mathfrak{r}$ eintreten zu lassen. Wir wollen nämlich in Zukunft den Radiusvektor von dem Elektron nach dem Punkte P ziehen. Dadurch wird die Richtung von $\mathfrak{r}$ umgekehrt und anstatt

$$1 + \frac{u}{v}\cos(\mathfrak{u}, \mathfrak{r})$$

haben wir

$$1 - \frac{u}{v}\cos(\mathfrak{u}\mathfrak{r}) \quad \text{bzw.} \quad 1 - \frac{\mathfrak{u}\mathfrak{r}_1}{v}.$$

Ferner wollen wir eine Differentiation nach t dadurch kennzeichnen, daß wir über die zu variierende Größe einen Punkt setzen; z. B. bedeutet $\dot{r}$ den Differentialkoeffizienten $\frac{dr}{dt}$ und es ist $\ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2}$ usw.

Es ist nun zunächst

$$\mathfrak{u} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt_m} = \dot{\mathfrak{r}}\frac{dt}{dt_m} = \frac{\dot{\mathfrak{r}}}{\dot{t}_m}.$$

Folglich

$$\frac{\mathfrak{u}\mathfrak{r}_1}{v} = \frac{\dot{\mathfrak{r}}\mathfrak{r}_1}{v\dot{t}_m}.$$

Da aber auch

$$\dot{\mathfrak{r}}\mathfrak{r}_1 = \frac{d}{dt}(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}) - \dot{\mathfrak{r}}_1\mathfrak{r}$$

und

$$\mathfrak{r}_1\mathfrak{r} = r \quad \text{und} \quad \dot{\mathfrak{r}}_1\mathfrak{r} = 0,$$

so ist

$$\dot{\mathfrak{r}}\mathfrak{r}_1 = \dot{r}.$$

1) O. Heaviside, *Nature*, 6. November 1902 und Februar 1903.

Daher

$$r\left(1-\frac{u}{v}\cos(u\mathfrak{r})\right)=r\left(1-\frac{1}{v}\frac{\dot{r}}{\dot{t}_m}\right).$$

Nach einer bereits angegebenen Beziehung

$$r=v(t-t_m)$$

ist ferner

$$\dot{r}=v(1-\dot{t}_m)$$

und daher

$$r\left(1-\frac{u}{v}\cos(u\mathfrak{r})\right)=\frac{r}{\dot{t}_m}.$$

An Stelle von (Ic), (IIc), (III) und (IV) hat man die höchst bemerkenswerten Beziehungen

(Id) $$\varphi=\frac{qv^2\dot{t}_m}{r},$$

(IId) $$\mathfrak{A}=-\frac{q\dot{\mathfrak{r}}}{r},$$

(III) $$\mathfrak{H}=-q\,\mathrm{curl}\frac{\dot{\mathfrak{r}}}{r},$$

(IV) $$\mathfrak{D}=\frac{q}{4\pi v^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\dot{\mathfrak{r}}}{r}+\frac{q}{4\pi}\nabla\frac{\dot{t}_m}{r}.$$

Führt man die in (IV) vorgeschriebenen Differentiationen aus, so findet man

(1) $$\mathfrak{D}=\frac{q}{4\pi v^2}\left(\frac{\ddot{\mathfrak{r}}}{r}-\frac{\dot{\mathfrak{r}}\dot{r}}{r^2}\right)+\frac{q}{4\pi v^2}\left(\frac{v^2}{r}\nabla\dot{t}_m-\frac{v^2\dot{t}_m}{r^2}\nabla r\right)$$
$$=\frac{q}{4\pi v^2}\left(\frac{v^2}{r}\nabla\dot{t}_m+\frac{\ddot{\mathfrak{r}}}{r}\right)-\frac{q}{4\pi v^2}\left(\frac{\dot{\mathfrak{r}}\dot{r}}{r^2}+\frac{v^2}{r^2}\dot{t}_m\nabla r\right).$$

Zur weiteren Entwickelung dieses Ausdruckes beachten wir, daß eine Differentiation der Gleichung

(2) $$r=v(t-t_m)$$

liefert

(3) $$\nabla r=-v\nabla t_m.$$

Und da infolge der Beziehung, welche eine jede mit Lichtgeschwindigkeit stattfindende zeitliche Ausbreitung mit der räumlichen verknüpft,

...mung.

$$\ldots t_m,$$

... mit (3)

$$\ldots = \mathfrak{r}_1 (v - \dot r),$$

$$\ldots t_m) = \mathfrak{r}_1 (v - \dot r)^2.$$

$$\ldots \frac{q}{\pi v^2 r^2}\left[\dot{\mathfrak{r}} r - \mathfrak{r}_1 (\dot r - v)^2\right].$$

$$\ldots \left(r \dot r \dot{\mathfrak{r}}_1 - v^2 \mathfrak{r}_1 + 2 \dot r v \mathfrak{r}_1\right)$$

$$\ldots + \frac{v^2 \mathfrak{r}_1}{r} - 2 \dot r v \mathfrak{r}_1\Big)$$

$$\ldots \frac{v \mathfrak{r}_1}{r}\Big).$$

...d.

$$\ldots 3 \dot r \mathfrak{r}_1 + v \mathfrak{r}_1\Big).$$

... elektrische Verschiebung ... in einem beliebigen ... Form sehr bemerkens- ... hauptsächlich der Fall, ... Faktor $\frac{1}{r^2}$ enthält, zu ver- ... ungen kommen nämlich ... em schwingenden Elek- ... sind im Vergleich mit ... mit dem Weg, den ein ...

... n A. Sommerfeld ist die ... irgendwelche Einschränkung ...

Es ist nun zu beachten, daß auch in dem ersten Term noch Glieder stecken, welche den Faktor $\frac{1}{r^2}$ enthalten. Entwickelt man nämlich $\ddot{\mathfrak{r}}_1$, so findet man

$$\ddot{\mathfrak{r}}_1 = \frac{\ddot{\mathfrak{r}}}{r} - \frac{\dot{\mathfrak{r}}\dot{r}}{r^2} - \frac{\dot{\mathfrak{r}}_1\dot{r}}{r} - \frac{\mathfrak{r}_1\ddot{r}}{r} + \frac{\mathfrak{r}_1\dot{r}^2}{r^2}.$$

Der dritte Term kann noch dargestellt werden durch

$$\frac{\dot{\mathfrak{r}}_1\dot{r}}{r} = \frac{\dot{\mathfrak{r}}r}{r^2} - \frac{\mathfrak{r}_1\dot{r}^2}{r^2}.$$

Daher folgt für große Entfernungen von einem sich beliebig bewegenden Elektron

$$\mathfrak{D} = \frac{q}{4\pi v^2 r}(\ddot{\mathfrak{r}} - \mathfrak{r}_1\ddot{r}). \tag{11}$$

Also ist die elektrische Kraft, da

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}\dot{r} = \frac{d}{dt}(\dot{\mathfrak{r}}\mathfrak{r}_1) = \ddot{\mathfrak{r}}\mathfrak{r}_1,$$

$$\mathfrak{E} = \frac{q}{r}(\ddot{\mathfrak{r}} - \mathfrak{r}_1\ddot{r}). \tag{12}$$

Nach einer bekannten Rechenregel läßt sich hierfür auch schreiben

$$\mathfrak{E} = \frac{q}{r}V\mathfrak{r}_1V\ddot{\mathfrak{r}}\mathfrak{r}_1. \tag{13}$$

Die magnetische Kraft ist gegeben durch die Gleichung

$$\mathfrak{H} = -\frac{q}{r}\operatorname{curl}\dot{\mathfrak{r}}. \tag{14}$$

$\mathfrak{H}$ läßt sich auch als einfache Funktion von $\mathfrak{E}$ ausdrücken. Nach der Grundgleichung ist

$$\operatorname{curl}\mathfrak{H} = 4\pi\frac{d\mathfrak{D}}{dt} = \frac{1}{v^2}\frac{d}{dt}\mathfrak{E}.$$

$\mathfrak{E}$ breitet sich mit Lichtgeschwindigkeit aus.

Dann ist

$$\frac{d\mathfrak{E}}{dt} = -(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{E}.$$

Hierfür können wir schreiben, weil die Ausbreitung in Richtung von $\mathfrak{r}_1$ erfolgt,

$$\frac{d\mathfrak{E}}{dt} = -v(\mathfrak{r}_1\nabla)\mathfrak{E}.$$

Nach einer bekannten Rechenregel ist

$$-(\mathfrak{r}_1\nabla)\mathfrak{E} = \operatorname{curl} V\mathfrak{r}_1\mathfrak{E},$$

wenn wir die Variation von $\mathfrak{r}_1$ vernachlässigen, weil sie den Faktor $\frac{1}{r^2}$ in das Endresultat bringen würde, und wenn wir ferner beachten, daß im reinen Äther

$$\nabla\mathfrak{E} = 0.$$

Folglich können wir setzen

$$\operatorname{curl}\mathfrak{H} = \frac{1}{v}\operatorname{curl} V\mathfrak{r}_1\mathfrak{E}.$$

Also

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{v} V\mathfrak{r}_1\mathfrak{E}.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit Gleichung (13), so folgt weiter

$$\mathfrak{E} = v V\mathfrak{H}\mathfrak{r}_1.$$

§ 11.

Die Strahlung, welche von sich bewegenden Elektronen ausgeht.

Die am Ende des vorigen Paragraphen abgeleiteten Gleichungen für die elektrische und magnetische Kraft

$$\mathfrak{E} = \frac{q}{r}(\ddot{\mathfrak{r}} - \mathfrak{r}_1\ddot{r}),$$

$$\mathfrak{H} = \frac{q}{vr} V\mathfrak{r}_1\ddot{\mathfrak{r}}$$

gelten, wie erwähnt, für beliebig sich bewegende Elektronen an Stellen des Raumes, welche so weit von den Elektronen entfernt sind, daß höhere Potenzen von $\frac{1}{r}$ zu vernachlässigen sind. Letzteres ist derjenige Fall, welcher für Strahlungserscheinungen fast ausschließlich in Frage kommt.

a) Die lineare Schwingung.

Ein Elektron führe parallel der $\mathfrak{k}$-Richtung lineare Schwingungen um den Punkt O aus. Bezeichnen wir den

Abstand des Elektrons von O mit p, so sei die Bewegung bestimmt durch

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{k}p = \mathfrak{a} \sin \frac{t 2\pi}{T}.$$

Die elektromagnetische Erregung, welche zur Zeit t in P besteht, habe das Elektron zur Zeit t_m erzeugt. Zu dieser Zeit war der von dem Elektron nach P gezogene Radiusvektor $\mathfrak{r}$. Zur Zeit t_m habe $\mathfrak{p}$ den Wert $\mathfrak{p}_m$, so daß

$$\mathfrak{p}_m = \mathfrak{k}p_m = \mathfrak{a} \sin \frac{2\pi}{T} t_m, \tag{1}$$

also

$$\ddot{\mathfrak{p}}_m = \mathfrak{k}\ddot{p}_m = \dot{t}_m \mathfrak{a} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin \frac{2\pi}{T} t_m. \tag{1a}$$

Außerdem ziehen wir einen Radiusvektor $\mathfrak{r}_0$ von O nach P. Dann ist

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + \mathfrak{p}_m, \tag{2}$$

$$r = \mathfrak{r}_0 \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{p}_m \mathfrak{r}_1 \tag{3}$$

Nach der Voraussetzung ist $\mathfrak{p}$ klein gegen $\mathfrak{r}$ in großen Entfernungen vom Elektron. Daher ist die Variation von $\mathfrak{r}_1$ und von $\mathfrak{r}_0 \mathfrak{r}_1$ zu vernachlässigen und wir dürfen setzen

$$\ddot{r} = \ddot{\mathfrak{p}}_m \mathfrak{r}_1.$$

Setzt man das in die Gleichung für $\mathfrak{E}$ ein, so folgt

$$\mathfrak{E} = \frac{q}{r} \left(\ddot{\mathfrak{p}}_m - \mathfrak{r}_1 (\ddot{\mathfrak{p}}_m \mathfrak{r}_1)\right). \tag{4}$$

Nach einer bekannten vektoranalytischen Formel [siehe Anhang Gleichung (5)] ist, wie auch bereits bei Gleichung (13) § 10 bemerkt wurde,

$$\ddot{\mathfrak{p}}_m - \mathfrak{r}_1 (\ddot{\mathfrak{p}}_m \mathfrak{r}_1) = \mathfrak{V} \mathfrak{r}_1 \mathfrak{V} \ddot{\mathfrak{p}}_m \mathfrak{r}_1, \tag{5}$$

daher

$$\mathfrak{E} = \frac{q}{r} \mathfrak{V} \mathfrak{r}_1 \mathfrak{V} \ddot{\mathfrak{p}}_m \mathfrak{r}_1. \tag{6}$$

Die elektrische Kraft steht folglich senkrecht auf der Richtung des Strahles und ihre Schwingung erfolgt in der Ebene, welche die Schwingungsrichtung des Elektrons mit der Strahlrichtung bildet. Infolge der oben erwähnten Voraussetzung dürfen wir

$\mathfrak{r}_1$ als in die Verbindungslinie von P mit O fallend betrachten, d. h. in die Richtung von $\mathfrak{r}_0$. Setzt man den Wert von $\ddot{\mathfrak{p}}_m$ ein, so darf man für den Absolutwert von $\mathfrak{E}$ schreiben

$$E = \frac{qa}{r_0}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin(\mathfrak{r}_0\ddot{\mathfrak{p}}) \sin\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r_0}{v}\right). \tag{7}$$

Zu dieser Gleichung ist noch zu bemerken, daß $\dot{t}_m$ gleich der Einheit gesetzt ist, weil wir angenommen haben, daß $\mathfrak{p}$ gegen $\mathfrak{r}$ sehr klein sei. Dann können Werte mit den Faktoren von der Ordnung $\frac{\dot{\mathfrak{p}}}{v} = \frac{\dot{\mathfrak{r}}}{v}$ und auch $\frac{\dot{r}}{v}$ vernachlässigt werden.

Der Wert von E stimmt überein mit dem von Hertz für seinen Oszillator abgeleiteten.

Der Ausdruck für die magnetische Kraft

$$\mathfrak{H} = \frac{q}{vr_0} V\mathfrak{r}_{01}\ddot{\mathfrak{r}}$$

führt, wie man nunmehr leicht erkennt, zu dem Werte

$$\mathfrak{H} = \frac{q}{r_0 v} V\mathfrak{a}\mathfrak{r}_{01} \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r_0}{v}\right). \tag{8}$$

$\mathfrak{H}$ steht in großen Entfernungen von einem linear schwingenden Elektron senkrecht auf der Schwingungsrichtung und auf der Strahlrichtung und ist proportional dem Sinus des Winkels zwischen den genannten Richtungen. Hieraus folgt, daß die elektrische Kraft auf der magnetischen senkrecht steht. Auch der Wert von $\mathfrak{H}$ stimmt mit dem von Hertz abgeleiteten überein.

b) Die elliptische Schwingung eines Elektrons.

Ein Elektron beschreibe eine elliptische Bahn in der $\mathfrak{k}, \mathfrak{j}$-Ebene. Nach P ziehe ich einen Radiusvektor $\mathfrak{r}_0$ von dem Mittelpunkte der Ellipse aus und vom letzteren einen zweiten Radiusvektor $\mathfrak{r}$ nach dem Punkte der Ellipse, wo sich das Elektron zur Zeit t_m befindet. Es ist dann

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + \mathfrak{p}_m,$$
$$\dot{\mathfrak{r}} = \dot{\mathfrak{p}}_m,$$

wo

$$\mathfrak{p}_m = \mathfrak{a}\sin\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r}{v}\right) + \mathfrak{b}\cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r}{v}\right). \tag{9}$$

$\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ sind die Achsen der Ellipse. Wie bei der linearen Schwingung folgt zunächst

$$\mathfrak{E} = \frac{q}{r}\left[\ddot{\mathfrak{p}}_m - \mathfrak{r}_1(\ddot{\mathfrak{p}}\mathfrak{r}_1)\right] = \frac{q}{r}V\mathfrak{r}_1 V\ddot{\mathfrak{p}}\mathfrak{r}_1. \tag{10}$$

Nun ist

$$\ddot{\mathfrak{p}} = -\mathfrak{a}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{r}{v}\right) - \mathfrak{b}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{r}{v}\right).$$

Dann nimmt $\mathfrak{E}$ den Wert an

$$\mathfrak{E} = \frac{q}{r_0}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\left[\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{r_0}{v}\right)V\mathfrak{r}_{01}V\mathfrak{r}_{01}\mathfrak{a} + \cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{r_0}{v}\right)V\mathfrak{r}_{01}V\mathfrak{r}_{01}\mathfrak{b}\right]. \tag{11}$$

Man entnimmt diesem Ausdrucke, daß die elektrische Kraft als die Summe von zwei Komponenten darstellbar ist. Die eine Komponente schwingt in der Ebene gebildet aus $\mathfrak{k}$, d. h. $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{r}_0$, und zwar senkrecht zu $\mathfrak{r}_0$. Die zweite Komponente schwingt in der Ebene gebildet aus $\mathfrak{j}$, d. h. $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{r}_0$, und zwar ebenfalls senkrecht zu $\mathfrak{r}_0$. Der Zahlenwert der ersteren Komponente ist

$$E_a = \frac{qa}{r_0}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin(\mathfrak{r}_0\mathfrak{k})\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{r_0}{v}\right), \tag{12}$$

während der Tensor der zweiten in der $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{r}$-Ebene schwingenden Komponente sich schreibt

$$E_b = \frac{qb}{r_0}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin(\mathfrak{r}_0\mathfrak{j})\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{r_0}{v}\right). \tag{13}$$

Man findet für die magnetische Kraft, wenn man beachtet, daß

$$\mathfrak{H} = \frac{q}{rv}V\mathfrak{r}_1\ddot{\mathfrak{p}},$$

$$\mathfrak{H} = \frac{-q}{vr_0}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\left[V\mathfrak{r}_{01}\mathfrak{a}\cdot\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{r_0}{v}\right) + V\mathfrak{r}_{01}\mathfrak{b}\cdot\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{r_0}{v}\right)\right]. \tag{14}$$

Man muß aus dieser Gleichung schließen, daß die magnetische Kraft in großen Entfernungen von einem elliptisch schwingenden Elektron senkrecht zu dem nach dem Elektron gezogenen Radiusvektor steht.

Vergleicht man den Wert von $\mathfrak{H}$ mit demjenigen von $\mathfrak{E}$, so findet man, daß beide senkrecht zueinander und zum Radiusvektor stehen.

c) Die Strahlung von einem kreisförmig sich bewegenden Elektron.

Man braucht in die Gleichungen für das elliptisch schwingende Elektron nur

$$a = b$$

zu setzen, um die von dem in der $\mathfrak{j}, \mathfrak{k}$-Ebene kreisenden Elektron herrührenden Kräfte zu finden. Man erhält dann

$$\mathfrak{E} = \frac{aq}{r_0}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\left[\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{r_0}{v}\right)\mathfrak{V}\mathfrak{r}_0\mathfrak{V}\mathfrak{r}_{01}\mathfrak{k} + \cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{r_0}{v}\right)\mathfrak{V}\mathfrak{r}_{01}\mathfrak{V}\mathfrak{r}_{01}\mathfrak{j}\right], \tag{15}$$

$$\mathfrak{H} = \frac{aq}{vr_0}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\left[\mathfrak{V}\mathfrak{k}\mathfrak{r}_{01}\cdot\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{r_0}{v}\right) + \mathfrak{V}\mathfrak{j}\mathfrak{r}_{01}\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{r_0}{v}\right)\right]. \tag{16}$$

Die von einem schwingenden Elektron ausgestrahlte Energie.

Denkt man sich um den Schwingungsmittelpunkt eines oszillierenden Elektrons eine sehr große Kugelfläche konstruiert, so tritt durch diese Fläche pro Zeiteinheit eine Energiemenge aus, welche durch den Poyntingschen Vektor bestimmt ist. D. h.

$$\mathfrak{W} = \frac{1}{4\pi}\int \mathfrak{V}\mathfrak{E}\mathfrak{H}\, d\mathfrak{g}.$$

Wir beschränken uns auf die Ableitung der von einem linear schwingenden Elektron abgegebenen Energie, indem aus dem erzielten Resultate leicht der Ausdruck für beliebig schwingende Elektronen erhalten werden kann. Von Larmor wurde im Jahre 1897 zuerst der Ausdruck für die von einem beliebig sich bewegenden Elektron abgegebene Energie abgeleitet.

Da, wie gezeigt wurde,

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{v} V \mathfrak{r}_1 \mathfrak{E},$$

so wird

$$V \mathfrak{E} \mathfrak{H} = \frac{1}{v} V \mathfrak{E} V \mathfrak{r}_1 \mathfrak{E} = \frac{1}{v} \mathfrak{r}_1 \cdot \mathfrak{E}^2 - \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{r}_1 \mathfrak{E}.$$

Der zweite Term der rechten Seite verschwindet, weil $\mathfrak{r}_1 \perp \mathfrak{E}$.

Setzt man nun aus Gleichung (7) den Wert von $\mathfrak{E}^2$ bzw. E^2 ein, so folgt für die pro Zeiteinheit ausgestrahlte Energie, wenn wir beachten, daß das Element der Kugelfläche die Richtung von $\mathfrak{r}_1$ hat,

$$W = \frac{q^2 a^2 (2\pi)^4}{4\pi r^2 v T^4} \sin^2 \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r}{v}\right) \int \sin^2 (\mathfrak{r}_0, \ddot{\mathfrak{p}})\, dg.$$

Das Integral enthält die goniometrische Funktion

$$\sin^2 \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r}{v}\right)$$

als Außenfaktor. Wir bilden hiervon den Mittelwert während einer Sekunde

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r}{v}\right) dt.$$

Da

$$\sin^2 \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r}{v}\right) = \frac{1}{2}\left[1 - \cos \frac{4\pi}{T}\left(t - \frac{r}{v}\right)\right],$$

so wird

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r}{v}\right) dt = \frac{1}{2T} \int_0^T \left[dt - \cos \frac{4\pi}{T}\left(t - \frac{r}{v}\right) dt\right].$$

Da

$$\int_0^T \cos \frac{4\pi}{T}\left(t - \frac{r}{v}\right) dt = 0,$$

so wird

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r}{v}\right) dt = \frac{1}{2},$$

folglich

$$W = \frac{q^2 a^2 \left(\frac{2\pi}{T}\right)^4}{8\pi r^2 v} \int \sin^2 (\mathfrak{r}_0, \ddot{\mathfrak{p}})\, dg,$$

wo die Integration über die ganze Kugelfläche zu erstrecken ist. Der Schwingungsmittelpunkt befinde sich im Anfangs-

punkte eines Koordinatensystems. Die Schwingung erfolge parallel der X-Achse. Wir teilen die Kugelhülle in eine unendliche Anzahl von Zonen ein, indem wir senkrecht zur X-Achse die Kugel durch unendlich benachbarte Ebenen zerlegen. Dann ist die Fläche einer einzelnen Zone

$$dg = 2\pi r\, dx.$$

Da aber

$$\cos(\mathfrak{r}_0 \mathfrak{p}) = -\frac{x}{r},$$

so wird, wenn wir den Winkel zwischen $\mathfrak{r}_0$ und $\mathfrak{p}$ mit φ bezeichnen,

$$dg = +2\pi r^2 \sin\varphi\, d\varphi.$$

Dann folgt

$$\int \sin^2\varphi\, dg = 2\pi r^2 \int \sin^3\varphi\, d\varphi$$

$$= 2\pi r^2 \left(\frac{1}{12}\cos^3\varphi - \frac{3}{4}\cos\varphi\right)$$

$$= 2\pi r^2 \left(\frac{1}{3}\cos^3\varphi - \cos\varphi\right).$$

Setzt man diesen Wert in W ein und beachtet, daß die Grenzen der Integration 0 und π sind, so erhält man

$$W = \frac{q^2 a^2}{4v}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^4 \Big[\Big(\cos\varphi - \frac{1}{3}\cos^3\varphi\Big)\Big]_{\pi}^{0},$$

$$W = \frac{q^2 a^2}{3v}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^4.$$

Dieser Ausdruck stimmt mit dem zuerst von Larmor abgeleiteten Werte für die von einem Elektron ausgestrahlte Energie überein. Larmor findet nämlich:

$$W = \frac{2q^2 c^2}{3v},$$

wo c die Beschleunigung bedeutet.

§ 12.
Über den Zeemaneffekt.

Es ist wiederholt in früherer Zeit der Versuch gemacht worden, und zwar zuerst von Faraday, eine Einwirkung eines

Magnetfeldes auf die Strahlung einer im Felde befindlichen Lichtquelle zu entdecken. Diese Versuche scheiterten an den unzulänglichen experimentellen Hilfsmitteln der damaligen Zeit. Erst P. Zeeman gelang es, einen derartigen Einfluß zu beobachten. Die Erscheinung besteht im wesentlichen in folgendem. Bringt man eine Lichtquelle, welche ein Linienspektrum liefert, in das Feld eines starken Elektromagneten und zerlegt das Licht durch ein gutes Rowlandsches Gitter in ein Spektrum, so bemerkt man, wenn der Lichtstrahl der Richtung der Magnetkraft parallel verläuft, an Stelle einer ins Auge gefaßten Linie des betreffenden Metalls — es sei, um einfache Verhältnisse zu haben, eine bestimmte Linie des Kadmiumspektrums — zwei Linien, welche symmetrisch zur ursprünglichen liegen. Eine weitere Untersuchung der beiden Linien zeigt, daß sie zirkular polarisiert sind; und zwar ist die Linie mit kürzerer Wellenlänge im Sinne des magnetisierenden Stromes zirkular polarisiert und die Linie mit größerer Wellenlänge im anderen Sinne.

Verläuft der Lichtstrahl senkrecht zur Richtung des Magnetfeldes, so beobachtet man ein Triplet, in welchem die mittlere Linie die Lage der ursprünglichen hat. Alle drei Linien sind polarisiert. Die Schwingungen der beiden äußeren sind senkrecht zu den Kraftlinien des Magnetfeldes, während die Schwingungen der mittleren Linie parallel den Kraftlinien erfolgen.

Diese Art der Einwirkung eines gleichförmigen Feldes auf die Schwingungsperiode ist typisch für bestimmte Liniengruppen einer Reihe von Metallen, wie Zink, Kalzium, Strontium, Magnesium und Quecksilber. Bei anderen Liniengruppen dieser Metalle und bei den Gruppen vieler anderer Metalle sind die Erscheinungen aber bedeutend komplizierter. Wir beschränken uns hier auf die Aufgabe, die Gesetzmäßigkeiten der normalen Triplets und Dublets mathematisch zu formulieren.

Im Einklang mit den bereits erörterten Versuchsresultaten auf dem Gebiete der Gasentladungen und der radioaktiven Substanzen stellen wir uns vor, daß das elektrisch neutrale

Atom eines leuchtenden Metalldampfes aus einem positiven Körperatom und dem beweglichen negativen Elektron bestehe. Die Schwingungen, welche den Linien einer Serie entsprechen, schreiben wir der Bewegung des Elektrons zu.

Befindet sich ein in Bewegung begriffenes geladenes Teilchen in einem magnetischen Felde, so wissen wir, daß eine elektrodynamische Kraft auf es wirkt, welche nach Größe und Richtung bestimmt ist durch den Ausdruck

$$\mathfrak{F}_+ = e\mathfrak{V}\mathfrak{u}\mathfrak{H}. \tag{1}$$

e bedeutet die Ladung des Teilchens. $e\mathfrak{u}$ bedeutet den Konvektionsstrom. Ist e wie beim Elektron negativ, so kehrt die Kraft $\mathfrak{F}$ ihre Richtung um, d. h.

$$\mathfrak{F}_- = e\mathfrak{V}\mathfrak{H}\mathfrak{u}. \tag{2}$$

Um uns die hier in Frage kommenden Richtungen wieder ins Gedächtnis zurückzurufen, betrachten wir an der Hand der Figur die Einwirkung eines konstanten Magnetfeldes auf die kreisförmige Bewegung einer Punktladung. Kreist die positive Ladung im Sinne der Zeiger der Uhr und sind die Kraftlinien von dem Beobachter fort gerichtet, so wirkt in jedem Punkte die elektrodynamische Kraft zentripetal, d. h. das Elektron beschreibt einen Kreis mit größerem Radius. Da nun die Kraftrichtung immer senkrecht zur Bewegungsrichtung ist und deshalb keine Arbeit von der Kraft geleistet wird, so bleibt die Geschwindigkeit der Bewegung unverändert und dies ist bei der vergrößerten Kreisbahn nur möglich, wenn die Umlaufszeit des Elektrons verringert wird. Betrachtet man die durch die Figur angegebene Bewegungsrichtung und die Richtung des Magnetfeldes, so erkennt man, daß die Richtung der magnetischen Kraftlinien dieselbe ist wie diejenige eines Feldes, welches von einem im angegebenen Sinne kreisenden Strome erzeugt wird. Die Pfeile sollen nur die Richtung, nicht die Größe angeben. In der Tat kann man leicht ableiten, daß ein äußeres Magnetfeld, welches dieselbe Richtung hat wie das

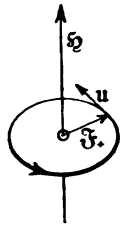

Fig. 6.

von dem kreisenden Elektron erzeugte Feld, die Schwingungsperiode des Elektrons verringert, während ein äußeres Feld, welches dem vom Konvektionsstrome erzeugten entgegengerichtet ist, die Umlaufszeit, d. h. die Periode verkürzt.

Uns interessiert hauptsächlich der Einfluß eines Magnetfeldes auf die Bewegung eines negativen Elektrons. Gleichung (2) kommt in diesem Falle zur Anwendung. Fig. 7 und 8 lassen die Richtung der Kraft $\mathfrak{F}_-$ erkennen.

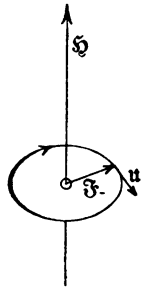

Fig. 7.

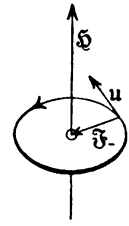

Fig. 8.

Man sieht, daß die Aufeinanderfolge von $\mathfrak{H}$, u und $\mathfrak{F}_-$ einem Rechtssysteme entspricht, wie es die Gleichung

$$\mathfrak{F}_- = \mathcal{N}\mathfrak{H}u$$

verlangt. Bei dem Drehungssinn des Elektrons und der Richtung der magnetischen Kraft, wie Fig. 7 sie angibt, wird die Periode der Kreisbewegung vergrößert, während bei Fig. 8 eine Verringerung eintritt.

Nachdem wir die allgemeine Einwirkung eines magnetischen Feldes auf die Bewegung eines kreisenden Elektrons dargelegt haben, wenden wir uns wieder der Theorie des Zeemaneffektes zu.

Zunächst ist einleuchtend, daß die Schwingungsbewegungen der Elektronen in dem lichtaussendenden Dampfe des betreffenden Metalls bei Abwesenheit eines magnetischen Feldes gänzlich ohne Bevorzugung irgendeiner Richtung vor sich gehen. Die allgemeinste Annahme, welche wir bezüglich der Bewegung eines Elektrons machen können, ist daher, daß der

von dem Schwingungszentrum nach dem Elektron gezogene Radiusvektor in jedem Zeitpunkte der Bewegung gegeben ist durch

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{i} a \cos \frac{2\pi}{T} t + \mathfrak{j} a \cos \frac{2\pi}{T} t + \mathfrak{k} a \cos \frac{2\pi}{T} t,$$

oder durch

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{i} a \left(\sin \frac{2\pi}{T} t + \alpha\right) + \mathfrak{j} a \left(\sin \frac{2\pi}{T} t + \beta\right) + \mathfrak{k} a \left(\sin \frac{2\pi}{T} t + \gamma\right).$$

Man erkennt in dieser Gleichung diejenige einer elliptischen Bewegung, und zwar entspricht sie der Annahme, daß das Elektron um seine Gleichgewichtslage unter der Wirkung einer elastischen Kraft freie Schwingungen ausführe. Die Differentialgleichung einer solchen Schwingung ist bekanntlich

$$m\ddot{\mathfrak{r}} + K^2 \mathfrak{r} = 0.$$

Die Periode der Schwingung ergibt sich durch Lösung zu

$$T = \frac{2\pi}{K} \sqrt{m}.$$

Unter dem Einflusse des magnetischen Feldes wird die Schwingungsbewegung nun, wie wir dargelegt haben, geändert. Wir können, ohne die Allgemeinheit des Problems einzuschränken, annehmen, die Richtung des magnetischen Feldes sei die $\mathfrak{k}$-Richtung. Diese stimme mit der Richtung der zunehmenden z eines Koordinatensystems, dessen Anfangspunkt der Schwingungsmittelpunkt des Elektrons sei, überein.

Dann wird die Kraft

$$\mathfrak{F}_- = \varepsilon V \mathfrak{H} \mathfrak{u}$$

auf die $\mathfrak{k}$-Komponente der Bewegung des Elektrons keinen Einfluß haben. Denn mit dieser Komponente von $\mathfrak{u}$ bildet $\mathfrak{H}$ den Winkel 0. Die linearen Schwingungen in der $\mathfrak{i}$- und $\mathfrak{j}$-Richtung zerlegen wir in zwei entgegengesetzte kreisförmige Schwingungen in der $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$-Ebene. Es sei kurz daran erinnert, daß jede einfache harmonische Schwingung in zwei entgegengesetzte kreisförmige Schwingungen zerlegt werden kann; z. B. ist

$$\mathfrak{i} a \cos wt = \left(\tfrac{1}{2} \mathfrak{i} a \cos wt - \tfrac{1}{2} \mathfrak{j} a \sin wt\right) + \left(\tfrac{1}{2} \mathfrak{i} a \cos wt + \tfrac{1}{2} \mathfrak{j} a \sin wt\right).$$

Man erkennt leicht, daß die zweite Klammer aus der ersten hervorgeht, wenn man das Vorzeichen von w, d. h. der Winkelgeschwindigkeit, umkehrt. Die Klammern entsprechen daher entgegengesetzten Drehungen.

Wir wollen den Einfluß des Feldes auf jede einzelne Kreisbewegung untersuchen.

Wir wenden uns zuerst zu dem Falle, wo die Drehung in dem Sinne stattfindet, daß eine rechtsgängige Schraube sich in der Richtung der magnetischen Kraft fortbewegen würde. Dann fällt die als Vektor dargestellte Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ in die Richtung von $\mathfrak{H}$, d. h. der Winkel zwischen $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{H}$ ist Null. Die Gleichung der Schwingungsbewegung ist allgemein, wenn wir beachten, daß zu der elastischen Kraft die elektrodynamische hinzukommt,

$$m\frac{d}{dt}\dot{\mathfrak{r}} + K^2\mathfrak{r} + e\mathfrak{V}\mathfrak{H}\dot{\mathfrak{r}} = 0.$$

Bei einer kreisförmigen Bewegung ist aber

$$\dot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{V}\mathfrak{w}\mathfrak{r}; \quad \frac{d}{dt}\dot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{V}\mathfrak{w}\dot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{V}\mathfrak{w}\mathfrak{V}\mathfrak{w}\mathfrak{r},$$

folglich

$$m\mathfrak{V}\mathfrak{w}\mathfrak{V}\mathfrak{w}\mathfrak{r} + K^2\mathfrak{r} + e\mathfrak{V}\mathfrak{H}\mathfrak{V}\mathfrak{w}\mathfrak{r} = 0. \tag{4}$$

Nach einer bereits oft verwandten Rechenregel wird, wenn wir beachten, daß $\mathfrak{r}$ senkrecht zu $\mathfrak{H}$ und zu $\mathfrak{w}$ und daß $\mathfrak{H}\mathfrak{w} = Hw$,

$$\mathfrak{r}mw^2 + eH\mathfrak{r}w - K^2\mathfrak{r} = 0,$$

$$w^2 - \frac{K^2}{m} + \frac{eH}{m}w = 0,$$

$$w = -\frac{eH}{2m} \pm \sqrt{\frac{K^2}{m} + \left(\frac{eH}{2m}\right)^2}. \tag{5}$$

Da die Beobachtung ergibt, daß die relative Änderung der Schwingungszahl sehr gering ist, so darf $\left(\frac{eH}{2m}\right)^2$ gegen $\frac{K^2}{m}$ vernachlässigt werden. Dann wird, da wir bei der festgesetzten Winkelgeschwindigkeit nur das positive Vorzeichen berücksichtigen,

$$\varkappa = \frac{2\pi}{T} = K\sqrt{\frac{1}{m} - \frac{eH}{2m}}, \tag{6}$$

$$T = \frac{2\pi\sqrt{m}}{K}\left(1 - \frac{eH}{2K}\right)\sqrt{m}. \tag{7}$$

Die Schwingungsdauer bei Abwesenheit des Feldes hatte den Wert

$$T_0 = \frac{2\pi\sqrt{m}}{K}.$$

Es ist daher sehr angenähert

$$\frac{\Delta T_0}{T_0} = \frac{eHT_0}{m4\pi}. \tag{8}$$

Nun ist bekanntlich $\tau T = \lambda$.

Man erhält daher für die relative Änderung der Wellenlänge

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{eH\lambda}{m4\pi v}. \tag{9}$$

Rotiert also ein Elektron in einer Ebene senkrecht zur Richtung der magnetischen Kraft mit einem Drehsinne, welcher demjenigen des magnetisierenden Stromes entgegengesetzt ist, so vergrößert sich die Wellenlänge in der durch Gleichung (9) bestimmten Weise.

Dieses Resultat stimmt überein mit der Beobachtung, daß die Linie mit größerer Wellenlänge in einem Sinne zirkular polarisiert ist, welcher dem magnetisierenden Strome entgegengesetzt ist.

Rotiert das Elektron im Sinne des magnetisierenden Stromes, so hat die Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ das entgegengesetzte Vorzeichen wie $\mathfrak{H}$. Dann wird

$$\mathfrak{w}\mathfrak{H} = -wH.$$

Beachtet man dies, so liefert nunmehr

$$m\mathfrak{V}\mathfrak{w}\mathfrak{V}\mathfrak{w}\mathfrak{r} + K^2\mathfrak{r} + \mathfrak{V}\mathfrak{H}\mathfrak{V}\mathfrak{w}\mathfrak{r} = 0$$

$$\mathfrak{r}mw^2 - \mathfrak{r}eHw - \mathfrak{r}K^2 = 0.$$

Daraus ergibt sich dann

$$w = +\frac{eH}{2m} \pm \sqrt{\frac{K^2}{m} + \left(\frac{eH}{2m}\right)^2}.$$

Es nimmt die Winkelgeschwindigkeit der Rotation in diesem Falle zu. Die Periode verringert sich. Denn es wird

$$T = \frac{2\pi}{K}\sqrt{m}\left(1 - \frac{eH\sqrt{m}}{2K}\right),$$

$$\frac{\Delta T_0}{T_0} = -\frac{eHT_0}{4\pi m},$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = -\frac{eHT_0}{4\pi m}.$$

Das Ergebnis ist ebenfalls in Übereinstimmung mit der Beobachtung. Beiläufig sei noch bemerkt, daß wir bei Hervorhebung der Übereinstimmung zwischen Experiment und Beobachtung stillschweigend vorausgesetzt haben, daß ein rotierendes Elektron auch zirkular polarisiertes Licht aufweisen müßte, wenn man es in Richtung der Rotationsachse beobachtet. Man überzeugt sich hiervon aber leicht durch Inspektion der Gleichungen für die Strahlung eines rotierenden Elektrons, welche wir abgeleitet haben. [Siehe die Gleichungen (15) u. (16) S. 94.]

Betrachtet man das Licht in einer zum Magnetfelde senkrechten Richtung, so müssen die beiden Komponenten linear polarisiert erscheinen. Die ursprüngliche Linie schwingt nun transversal zur Strahlrichtung und wird wahrgenommen.

Da die Änderung der Wellenlänge ziemlich genau meßbar ist, so muß auch das Verhältnis $\frac{e}{m}$ bestimmbar sein.

$$\frac{e}{m} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} \cdot \frac{4\pi v}{H}.$$

Runge und Paschen fanden für die im Quecksilberspektrum gemessenen normalen Triplets bei einer Feldstärke von 24,600 C. G. S.-Einheiten

$$\frac{e}{m} = 1{,}6 \cdot 10^7.$$

Wie man erkennt, stimmt dieser Wert gut überein mit dem aus Messungen an Kathodenstrahlen erhaltenen.

Wie bereits erwähnt, sind die spektroskopischen Erscheinungen, welche bei der Strahlung im magnetischen Felde auftreten, im allgemeinen viel komplizierter. Lorentz hat zu ihrer Erklärung angenommen, daß das Elektron in den meisten Fällen nicht freie Schwingungen ausführt, sondern daß es in seiner Bewegung durch die Anwesenheit der anderen Elektronen beeinflußt wird. Mit anderen Worten, es sind bei einer vollständigen Theorie der Erscheinungen dieselben Verhältnisse in Rechnung zu ziehen, welche in der Theorie der Dispersion eine ausschlaggebende Rolle spielen.[1])

Theorie und Experiment stimmen darin überein, daß es die Elektronen sind, welche durch das Magnetfeld beeinflußt werden. Der Umstand, daß die Bandenspektren im Magnetfelde keine Änderung erleiden, führt zur Annahme, daß diese Spektren von der Bewegung der positiven Körperatome und Gruppen von Körperatomen herrühren. Wie die Versuche mit Kanalstrahlen beweisen, ist die Masse der Körperatome im Durchschnitt — sie ist dem Atomgewichte proportional — vieltausendmal größer als die Masse der Elektronen, und es würde, wie Gleichung (8) zeigt, ein entsprechend stärkeres Feld zur Zerlegung erforderlich sein.

Die Zerlegung der Spektrallinien im magnetischen Felde hat sich als bedeutendes Hilfsmittel zur Erkennung homologer Linien erwiesen. Bekanntlich hat sich die spektroskopische Forschung mit zunehmendem Eifer der Aufgabe zugewandt, die Eigentümlichkeiten der Spektren der Elemente in gesetzmäßigen Zusammenhang mit anderen Eigenschaftsgrößen der Elemente, besonders mit ihrer Stellung im periodischen Systeme zu bringen. Nun hat sich gezeigt, daß die Linien von Serien, welche sich bei den Gliedern einer periodischen Gruppe von Metallen entsprechen, in derselben Weise zerlegt werden. Homologe Linien liefern dieselbe Anzahl von Komponenten, und diese haben denselben relativen Abstand voneinander.

---

1) Siehe hierüber die vorzügliche Abhandlung von C. Runge in Kaysers Handbuch der Spektroskopie, Vol. 2, pp. 611—659.

§ 13.

Die Theorie der Röntgenstrahlen.

Es wurde bereits darauf hingewiesen, daß Röntgenstrahlen im wesentlichen impulsive Ätherstörungen sind, welche sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Eine umfassende Theorie elektromagnetischer Pulsationen verdankt man O. Heaviside. Es würde über den Rahmen dieses Buches hinausgehen, wollten wir hier die allgemeinen Grundlagen dieser Theorie entwickeln. Vielmehr wollen wir uns auf die Theorie der Röntgenstrahlen beschränken.

Rufen wir uns die bekannten Eigenschaften dieser Strahlen ins Gedächtnis zurück. Mit den Kathodenstrahlen teilen sie die Fähigkeit, Fluoreszenz zu erregen, chemische Wirkungen hervorzurufen, die Luft zu ionisieren und dadurch leitend zu machen, undurchsichtige Substanzen zu durchdringen. Wie die Kathodenstrahlen pflanzen sie sich geradlinig fort, aber sie werden nicht abgelenkt im magnetischen und elektrischen Felde. Eine fernere charakteristische Eigenschaft der Röntgenstrahlen ist ihre mit Lichtgeschwindigkeit erfolgende Ausbreitung. Der Beweis dieser Art der Ausbreitung wurde zuerst von Blondlot versucht. Blondlot schaltet eine mit einem Induktorium betriebene Röntgenröhre parallel zu einer Funkenstrecke. Die Funkenstrecke wird so reguliert, daß eine sehr geringe weitere Annäherung der Elektroden genügt, um die Entladung in der Röntgenröhre zum Verschwinden zu bringen und sie auf die Funkenstrecke zu beschränken. In der Funkenstrecke ist die Entladung oszillatorisch. Bei jeder Entladung erreicht die Potentialdifferenz in der Röntgenröhre einen Wert, welcher genügt, die Röhre in Aktion zu versetzen; von da an steigt die Potentialdifferenz, bis in dem Oszillator ein Funke überspringt. Dann erlischt die Entladung in der Röntgenröhre.

Bringt man nun einen Hertzschen Resonator in die Nähe von A, so wird dieser von den sich ausbreitenden Hertzschen Wellen in Tätigkeit versetzt und es wird ein Funke überspringen. Diese Funken werden verstärkt durch die Röntgen-

strahlen, weil die Luft in der Funkenstrecke ionisiert wird. Offenbar wird der Funke am glänzendsten, wenn die Zeit, wo das Entladungspotential auftritt, mit dem Eintreffen der Röntgenstrahlen zusammenfällt. Die Röntgenstrahlung dauert um so länger, je länger der Draht HA ist, d. h. je mehr Zeit nötig ist zur Ausbreitung der elektromagnetischen Wellen von A nach H. — Nehmen wir nun an, es sei eine Stelle gefunden, wo der Resonator C eine maximale Helligkeit aufweist. Verlängern wir dann die Strecke AH um ein Stück α, ohne den Abstand CH zu ändern, so verschwindet das Maximum. Es tritt aber wieder auf, wenn wir jetzt die Röntgenröhre um ein Stück α der Resonatoröffnung nähern. Blondlot erklärt dieses Experiment durch die Annahme, daß die Röntgenstrahlen sich ebenso schnell ausbreiten wie das Licht, d. h. wie die Hertzschen Wellen. Denn durch die Verlängerung von AH wurde das Eintreffen der Röntgenstrahlen um $\frac{\alpha}{v}$ Sekunden verzögert; um daher die Koinzidenz wiederherzustellen, mußte die Röhre um α cm näher gebracht werden, wenn nämlich die Röntgenstrahlen diese Strecke in $\frac{\alpha}{v}$ Sekunden zurücklegen, d. h. wenn v die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Röntgenstrahlen ist.

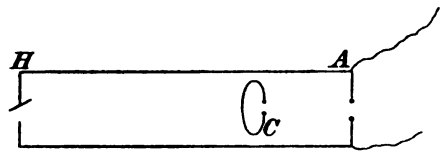

Fig. 9.

So sinnreich die Blondlotschen Versuche sind, so würden sie doch nicht ausreichen, um die Lichtgeschwindigkeit der Röntgenstrahlen zu beweisen. Unter anderem wäre zur Erklärung der Blondlotschen Versuche der Tatsache Rechnung zu tragen, daß von der Röntgenröhre selbst auch noch Hertzsche Wellen ausgehen, welche den Resonator erreichen, wenn dieser nicht in ganz außerordentlicher Weise dagegen beschützt wird. Aber abgesehen von Blondlots Versuchen zwingt die Gesamtheit der Erfahrungstatsachen zur Annahme, daß die

Röntgenstrahlen sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Nachdem über allen Zweifel erhaben festgestellt ist, daß die Kathodenstrahlen die Bahnen schnell bewegter geladener Teilchen sind, welche ihr elektromagnetisches Feld mit sich führen, folgt mit Bestimmtheit, daß eine plötzliche Vernichtung der Geschwindigkeit dieser Teilchen beim Auftreffen elektromagnetische Pulsationen erzeugen muß, welche sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Da jedes einzelne Elektron beim Aufprallen einen Impuls erzeugt, so besteht die Gesamtwirkung der wie Hagel auftreffenden Kathodenstrahlen in schnell aufeinander folgenden explosionsartigen Erschütterungen des Äthers. Vom Lichte unterscheiden sich daher die Röntgenstrahlen dadurch, daß die entsprechenden Ätherstörungen nicht kontinuierlich sind. Daß aber die Wirkungen doch in vielen Hinsichten mit denjenigen des Lichtes, besonders des kurzwelligen ultravioletten Lichtes übereinstimmen müssen, liegt auf der Hand. Zahlreiche Erfahrungstatsachen bestätigen dies.

Wenn wir jetzt zur Ableitung des elektromagnetischen Feldes übergehen, so befinden wir uns vor einer großen Schwierigkeit. Die magnetische und elektrische Kraft sind gemäß unseren Gleichungen kontinuierliche Funktionen der Zeit. In der Gleichung

$$\mathfrak{E} = \frac{q}{r} V r_1 V \ddot{r} r_1$$

bedeutet $\ddot{r}$ eine kontinuierliche Änderung der Geschwindigkeit. Für sprungweise Änderungen, wie dies bei der plötzlichen Vernichtung der Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen der Fall ist, scheint die Gleichung unanwendbar. Ähnliches gilt natürlich auch für die Gleichung, durch welche die magnetische Kraft bestimmt ist. $\ddot{r}$ würde einen unendlich großen Wert annehmen und damit auch $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$.

Dem Verfasser sind keine theoretischen Behandlungen bekannt geworden, welche auf diese Schwierigkeiten besonders eingehen. Die von Heaviside erzielte Lösung ist physikalisch schwer zu deuten. Er bedient sich der Methode der Operatoren und gelangt nach umständlichen Transformationen zu seinem Resultat.

Die Schwierigkeit, auf welche wir hingewiesen haben, wird vermieden, wenn wir auf die Ausdehnung des Elektrons gebührende Rücksicht nehmen. Bei plötzlichen oder sehr schnellen Geschwindigkeitsänderungen tritt diese Notwendigkeit immer auf.

Ein Elektron, welches wir uns wieder kugelförmig denken wollen — es habe den Radius a —, bewege sich mit der Geschwindigkeit u und werde dann plötzlich aufgehalten. Die Wirkung der impulsiven Ätherstörung werde im entfernten Punkte P beobachtet. Zieht man einen Radiusvektor vom Schwerpunkte des Elektrons nach P und teilt man dann die Oberfläche des Elektrons durch eine Schar von unendlich benachbarten Ebenen, welche senkrecht auf r stehen, in unendlich viele Zonen ein, so erkennt man, daß die Wirkung der Geschwindigkeitsänderung, welche von der P am nächsten liegenden, geladenen Zone herrührt, in P zuerst trifft.

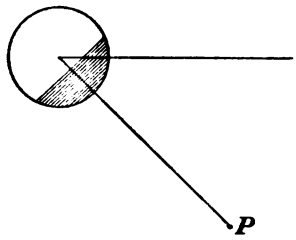

Fig. 10.

Auf diesen elementaren Impuls folgen dann kontinuierlich die nacheinander von den ferner liegenden Zonen herrührenden. Da die elementaren Impulse sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten, so wird der in P wahrgenommene Gesamtimpuls so lange andauern, wie das Licht Zeit gebraucht, um von der ersten bis zur letzten Zone zu gelangen, d. h. $\frac{2a}{v}$ Sekunden. Den Punkt P passiert also eine sphärische Welle in Form einer Kugelschale von der Dicke des Durchmessers des Elektrons. Wir können nun weiter aus der Dauer des in P wahrgenommenen Impulses schließen, daß die plötzliche Vernichtung der Geschwindigkeit des Elektrons in P genau so wirkt, als gebrauche das Elektron $\frac{2a}{v}$ Sekunden, um von der Geschwindigkeit u auf 0 zu fallen. Mit anderen Worten, das Elektron ändert seine Geschwindigkeit pro Zeiteinheit um $\frac{vu}{2a} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$.

Das heißt

$$\frac{d\dot{r}}{dt_m} = -\frac{vu}{2a}.$$

Folglich

$$\frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dt_m}\frac{dt_m}{dt} = -\frac{vu}{2a}\dot{t}_m.$$

Wie aber schon früher gezeigt wurde, ist

$$\dot{t}_m = \frac{1}{1-\frac{ur_1}{v}}.$$

Daher

$$\ddot{r} = -\frac{vu}{2a\left(1-\frac{ur_1}{v}\right)}.$$

Folglich werden $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ die Form annehmen

$$\mathfrak{E} = \frac{qv}{2ra}\,V r_1 V r_1 u \cdot \frac{1}{1-\frac{ur_1}{v}},$$

$$\mathfrak{H} = \frac{q}{2ra}\,V u r_1 \cdot \frac{1}{1-\frac{ur_1}{v}}.$$

Wir wollen nunmehr auch die Energie der Röntgenstrahlung berechnen, d. h. die Energie, welche ein Elektron abgibt, wenn die Geschwindigkeit seiner gleichförmigen Bewegung plötzlich vernichtet wird. Diese Energie muß gleich sein der bereits berechneten elektromagnetischen Bewegungsenergie J_u einer Kugel mit dem Radius a, welche sich mit der Geschwindigkeit u bewegt. Der Wert von J_u war [siehe Seite 50, Gleichung (91a)]

$$J_u = \frac{q^2v^2}{2a}\left(\frac{v}{u}\log\frac{v+u}{v-u} - 2\right).$$

Diese Energie muß, wenn anders unsere Berechnung von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ stimmen soll, in der mit Lichtgeschwindigkeit sich ausbreitenden Kugelschale von der Dicke $2a$ enthalten sein. Mit anderen Worten, konstruieren wir um das Elektron als Mittelpunkt eine Kugelfläche, so muß obiger Energiebetrag durch diese Kugelfläche strömen.

Der von Poynting angegebene Energiefluß

$$\frac{1}{4\pi}\int V\mathfrak{E}\mathfrak{H}\,d\mathfrak{g}$$

bedeutet die Energie, welche in der Zeiteinheit die Kugelfläche durchströmen würde. Aber der elektromagnetische Impuls der Röntgenstrahlung durchströmt die einschließende Fläche nur während der Zeit $\frac{2a}{v}$, d. h. während der Zeit, welche die Schale nötig hat, um die Fläche zu passieren. Daher ist die Energie der Röntgenstrahlung

$$W = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{2a}{v}\int V\mathfrak{E}\mathfrak{H}\,d\mathfrak{g}.$$

Nun ist, wie schon bei der Ableitung der von einem linear schwingenden Elektron ausgestrahlten Energie gezeigt wurde

$$V\mathfrak{E}\mathfrak{H} = \frac{1}{v}\mathfrak{r}_1 E^2.$$

Setzt man daher den Tensor des obigen Wertes von $\mathfrak{E}$ ein, so wird

$$W = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{q^2u^2}{2a}\int\frac{\mathfrak{r}_1\sin^2(\mathfrak{u}\mathfrak{r}_1)\,d\mathfrak{g}}{r^2\left(1-\frac{u}{v}\cos(\mathfrak{u}\mathfrak{r}_1)\right)^2}.$$

Für $\mathfrak{r}_1 d\mathfrak{g}$ können wir dg schreiben. Bezeichnen wir den Winkel $(\mathfrak{u}\mathfrak{r}_1)$ mit γ, so nimmt der Wert von W die Form an

$$W = \frac{1}{4\pi}\,\frac{q^2u^2}{2a}\int\frac{\sin^2\gamma\,dg}{r^2\left(1-\frac{u}{v}\cos\gamma\right)^2}.$$

Teilen wir, wie dies bei der Berechnung der von einem schwingenden Elektron ausgestrahlten Energie geschah, die Kugelfläche in unendlich viele Zonen senkrecht zur $\mathfrak{u}$-Richtung ein, so wird wieder [siehe Gleichung (10)] die Fläche einer solchen Zone

$$dg = 2\pi r^2\sin\gamma\,d\gamma.$$

Daher wird

$$W = \frac{q^2u^2}{4a}\int_0^{\pi}\frac{\sin^3\gamma\,d\gamma}{\left(1-\frac{u}{v}\cos\gamma\right)^2}.$$

Es ist aber

$$\sin^3\gamma\, d\gamma = \frac{1}{3} d\cos^3\gamma - d\cos\gamma.$$

Setzt man nun

$$1 - \frac{u}{v}\cos\gamma = z,$$

also

$$\cos\gamma = (1-z)\frac{v}{u},$$

$$\cos^3\gamma = (1-z)^3\frac{v^3}{u^3},$$

$$d\cos\gamma = -\frac{v}{u}dz,$$

$$\frac{1}{3}d\cos^3\gamma = -(1-z)^2\frac{v^3}{u^3}dz,$$

so erhält man

$$W = \frac{q^2u^2}{4a}\int_{1-\frac{u}{v}}^{1+\frac{u}{v}}\left(\frac{2z-1-z^2}{z^2}dz + \frac{v}{u}\frac{dz}{z^2}\right).$$

Die Grenzen des Integrals $1+\frac{u}{v}$ und $1-\frac{u}{v}$ ergeben sich, wenn man beachtet, daß, wenn der Kosinus von γ sich von -1 zu $+1$ ändert entsprechend den Grenzen π und 0, dann z sich von $1+\frac{u}{v}$ zu $1-\frac{u}{v}$ ändert. Die Ausführung der Integration ist sehr einfach. Man erkennt sofort, daß

$$W = \frac{q^2u^2}{4a}\left[z\left(\frac{v^2}{u^2}-\frac{v}{u}\right) + \frac{2v^3}{u^3}\log z - \frac{v^3}{u^3}z\right]_{1-\frac{u}{v}}^{1+\frac{u}{v}},$$

$$W = \frac{q^2u^2}{2a}\left(\frac{v}{u}\log\frac{v+u}{v-u} - 2\right).$$

W ist also identisch mit J_u.

Von O. Heaviside wurde in ähnlicher Weise die magnetische Energie des Impulses berechnet und in Übereinstimmung mit dem von G. F. C. Searle erzielten Resultate gefunden.

§ 14.

Der Einfluß der Bewegung auf optische Erscheinungen.

Der Elektronentheorie liegt die Annahme zugrunde, daß der Äther ruht. Diese Auffassung führt zu wichtigen Folgerungen auf optischem Gebiete. Denn wenn der Äther an der Bewegung der die Strahlung erzeugenden Materie nicht teilnimmt, so muß notwendig die Übermittelung der die Strahlung konstituierenden periodischen elektromagnetischen Störungen durch eine Bewegung der Materie in bestimmter Weise beeinflußt werden. So entsteht die Frage, ob die bekannten Erscheinungen, welche direkt auf die Bewegung eines lichtaussendenden Körpers relativ zur Erde zurückzuführen sind — und hierhin gehören u. a. die interessanten Erscheinungen der Aberration und der Periodenänderung —, sich mit der Hypothese eines ruhenden Äthers und mit den von uns verwandten Lorentzschen Grundgleichungen in Einklang bringen lassen. Und weiter müssen wir uns fragen, wie gestaltet sich auf Grund der Lorentzschen Theorie der Einfluß der Erdbewegung auf die optischen Erscheinungen terrestrischer Lichtquellen. — Wir wenden uns nun zuerst der Aufgabe zu, das elektromagnetische Feld in einem Punkte P zu bestimmen, wenn sich ein leuchtendes Elektron relativ zu P translatorisch bewegt.

Die mathematische Behandlung der erwähnten Probleme ist eine schwierige. Durch Verwendung der Heavisideschen Gleichungen

$$\mathfrak{E} = \frac{q}{r}(\ddot{\mathfrak{r}} - \mathfrak{r}_1 \ddot{\mathfrak{r}}),$$

$$\mathfrak{H} = \frac{q}{rv} V \mathfrak{r}_1 \ddot{\mathfrak{r}}$$

habe ich aber, wie ich glaube, eine wesentliche Vereinfachung erzielen können. — Diese Gleichungen gelten für beliebige Elektronenbewegungen; allerdings unter einer bei der Ableitung hervorgehobenen Einschränkung: eine Bewegungsänderung darf

nicht so schnell stattfinden, daß sie während der Zeit, welche das Licht gebraucht, um eine Durchschnittsdimension des Elektrons zu durcheilen, einen merklichen Wert annimmt. Man erkennt aber, daß diese Einschränkung bei rein optischen Erscheinungen nicht in Erwägung kommen kann.

Im vorigen Paragraphen haben wir die magnetische und die elektrische Kraft für ein Elektron abgeleitet, welches um einen im Äther ruhenden Punkt schwingt und zwar für einen Ort, welcher weit von dem Elektron entfernt ist. Wie gestaltet sich nun das Feld eines schwingenden Elektrons, wenn man ihm eine translatorische Geschwindigkeit u erteilt?

Es ist vor allem notwendig, über die mathematischen Vereinfachungen klar zu werden, welche bei der Untersuchung der Lichterscheinungen gestattet sind.

1. Wir beschränken die Untersuchung auf die von einem einzelnen Elektron herrührende Strahlung. Da die Gleichungen für das elektromagnetische Feld linear sind, so ergibt sich die von vielen Elektronen herrührende Wirkung durch einfache Superposition der Einzelwirkungen.

2. Die translatorische Geschwindigkeit — und hier kommt die Erdgeschwindigkeit hauptsächlich in Betracht — sei klein im Vergleiche mit der Lichtgeschwindigkeit, so daß höhere Potenzen von $\frac{u}{v}$ zu vernachlässigen sind.

3. Im Einklange mit den in Frage kommenden tatsächlichen Verhältnissen soll die Entfernung des Punktes P von der Lichtquelle sehr viele Wellenlängen umfassen.

4. Die Amplitude a der Elektronenschwingung sei sehr klein im Vergleiche zur Wellenlänge und ferner sei die Amplitude kleiner als die Durchschnittsdimension l des Elektrons. Dann sind Ausdrücke wie $\frac{a}{v}$ und a^2 zu vernachlässigen.

5. Es wird angenommen, daß die Schwingungsbewegung der lichtaussendenden Elektronen durch die translatorische Bewegung im Äther nicht modifiziert wird.

Die translatorische Bewegung eines schwingenden Elektrons relativ zu einem im Äther ruhenden Punkte.

Der Schwingungsmittelpunkt des Elektrons bewege sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$, wo $\mathfrak{u}$ sehr klein ist gegen die Lichtgeschwindigkeit v. Die Entfernung von der Gleichgewichtslage sei durch $\mathfrak{p}$ bestimmt, wo

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{a} \sin \frac{2\pi t}{T}.$$

Die Erregung, welche zur Zeit t in P eintrifft, habe das Elektron zur Zeit t_m verlassen. Zu dieser Zeit t_m war der von

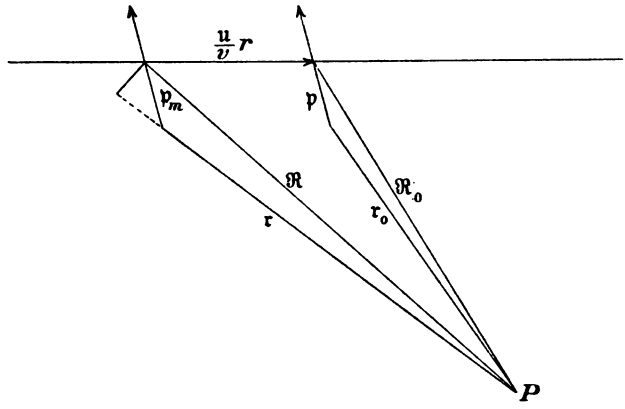

Fig. 11.

dem Elektron nach P gezogene Radiusvektor $\mathfrak{r}$, während der zur Zeit t nach P gezogene Radius $\mathfrak{r}_0$ war. Zieht man die Radiusvektoren $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}_0$ von den Schwingungszentren, welche den Zeiten t_m bzw. t entsprechen, nach P, so erkennt man leicht an der Hand der Figur, daß

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{R} + \mathfrak{p}_m. \tag{1}$$

Es ist nun

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0 + \mathfrak{u}(t - t_m) = \mathfrak{R}_0 + \frac{\mathfrak{u} r}{v}, \tag{2}$$

indem ja

$$t - t_m = \frac{r}{v}.$$

Man überzeugt sich leicht, daß, wenn man — was allgemein nicht gestattet ist — in Gleichung (2) r durch R_0 ersetzt, höchstens ein Fehler von $\frac{u^2}{v^2} R_0 + p \frac{u}{v}$ gemacht wird.

Der Unterschied von r und R_0 wird nämlich am größten, wenn P in der Bewegungslinie liegt und wenn gleichzeitig die Schwingung in dieser Linie stattfindet. Es wird dann nämlich, wie ein Blick auf die Figur lehrt

$$r\left(1 - \frac{u}{v}\right) = R_0 - p_m,$$

$$\frac{u}{v} r = \frac{u}{v}(R_0 - p_m)\left(1 + \frac{u}{v}\right). \tag{3}$$

Wir vernachlässigen aber $\frac{u^2}{v^2} R_0$ gegen $\frac{u}{v} R_0$, ebenso $\frac{u}{v} p_m$ gegen p_m gemäß den eingangs mitgeteilten Erwägungen. Folglich können wir schreiben

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{R}_0 + \frac{\mathfrak{u} R_0}{v} + \mathfrak{p}_m, \tag{4}$$

$$\mathfrak{r} = R_0\left(\mathfrak{R}_{01} + \frac{\mathfrak{u}}{v}\right) + \mathfrak{p}_m.$$

Um r zu finden, multiplizieren wir Gleichung (4) mit $\mathfrak{R}_{01}$ und beachten, daß der Winkel zwischen $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{R}_{01}$ sehr klein ist. Dann wird

$$r = R_0\left(1 + \frac{\mathfrak{u}}{v} \mathfrak{R}_{01}\right) + \mathfrak{p}_m \mathfrak{R}_{01}. \tag{5}$$

Gleichung (4) liefert ferner

$$\dot{\mathfrak{r}} = \dot{\mathfrak{R}}_0 + \frac{\mathfrak{u}}{v} \dot{R}_0 + \dot{\mathfrak{p}}_m. \tag{6}$$

Da der Radiusvektor $\mathfrak{R}_0$ sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ bewegt, so verschwinden die zweiten Derivierten von $\mathfrak{R}_0$ und R_0 und es wird

$$\ddot{\mathfrak{r}} = \ddot{\mathfrak{p}}_m. \tag{7}$$

Wir bilden nunmehr den Ausdruck für $\ddot{\mathfrak{p}}_m$.

Es ist

$$\mathfrak{p}_m = \mathfrak{a} \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r}{v}\right) \tag{8}$$

oder unter Benutzung des eben abgeleiteten Wertes von r

$$\mathfrak{p}_m = \mathfrak{a} \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{R^0}{v}\left(1 + \frac{\mathfrak{u}\mathfrak{R}_{01}}{v}\right)\right). \tag{9}$$

Wir haben den Wert $\frac{\mathfrak{p}_m \mathfrak{R}_{01}}{v}$ vernachlässigt.

Bei der Bildung des Ausdruckes $\dot{\mathfrak{p}}_m$ ist wohl zu beachten, daß R_0 eine Funktion von t ist. Wir wollen t von dem Zeitpunkte an zählen, wo das schwingende Elektron bei seiner Translation einen festen Punkt passiert. Bezeichnen wir den von O nach P gezogenen Radiusvektor mit $\mathfrak{s}$, so ist

$$\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{s} - \mathfrak{u}t, \tag{10}$$

$$R_0 = \mathfrak{s}\mathfrak{R}_{01} - \mathfrak{u}\mathfrak{R}_{01}t. \tag{11}$$

Dann wird, wenn wir die Phase zur Zeit $t = 0$ mit C bezeichnen

$$\mathfrak{p}_m = \mathfrak{a} \sin \frac{2\pi}{T}\left[t\left(1 + \frac{\mathfrak{u}}{v}\mathfrak{R}_{01}\right) - \mathfrak{s}\left(\mathfrak{R}_{01} + \frac{\mathfrak{u}}{v^2}\right) + C\right] \tag{12}$$

und

$$\ddot{\mathfrak{p}}_m = -\mathfrak{a}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\left(1 + \frac{\mathfrak{u}}{v}\mathfrak{R}_{01}\right)^2 \sin \frac{2\pi}{T}\left[t\left(1 + \frac{\mathfrak{u}}{v}\mathfrak{R}_{01}\right) - \mathfrak{s}\left(\mathfrak{R}_{01} + \frac{\mathfrak{u}}{v}\right) + C\right]. \tag{13}$$

Folglich

$$\mathfrak{E} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\left(1 + \frac{\mathfrak{u}}{v}\mathfrak{R}_{01}\right)\frac{q}{R_0} \sin \frac{2\pi}{T}\left[t\left(1 + \frac{\mathfrak{u}}{v}\mathfrak{R}_{01}\right) - \mathfrak{s}\left(\mathfrak{R}_{01} + \frac{\mathfrak{u}}{v}\right) + C\right] \mathrm{V}\mathfrak{r}_1 \mathrm{V}\mathfrak{r}_1 \mathfrak{a} \tag{14}$$

und

$$\mathfrak{H} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\left(1 + \frac{\mathfrak{u}}{v}\mathfrak{R}_{01}\right)\frac{q}{R_0 v} \sin \frac{2\pi}{T}\left[\ \right] \mathrm{V}\mathfrak{a}\mathfrak{r}_1. \tag{15}$$

Das Dopplersche Prinzip und die Aberration.

Aus den Gleichungen (14) und (15) lassen sich wichtige Folgerungen ziehen.

Die Gleichungen besagen zunächst, daß die elektrische und die magnetische Kraft in bezug auf Intensität und auf Schwingungsperiode abhängig sind von dem Winkel, welchen die Richtung der translatorischen Bewegung der Schwingungsquelle mit der Strahlrichtung bildet.

Gleichung (18), welche einen Vergleich der Schwingung der bewegten Quelle mit einer ruhenden gestattet, beweist, daß die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde n', welche durch den Faktor von t im Argumente der goniometrischen Funktion bestimmt ist, $\left(1 + \frac{u}{v} \mathfrak{R}_{01}\right)$ mal größer ist als im Ruhezustande. Bezeichnen wir letztere mit n, so wird

$$n' = n\left(1 + \frac{u}{v} \mathfrak{R}_{01}\right)$$

bzw.

$$T' = T\left(1 - \frac{u}{v} \mathfrak{R}_{01}\right).$$

Das ist der Inhalt des Dopplerschen Prinzips. Bewegt sich die Strahlungsquelle auf den Beobachter zu und befindet sich der letztere in der Bewegungslinie, so erscheint ihm die Periode auf den $\left(1 - \frac{u}{v}\right)$ten Teil reduziert. Bei Verwendung von monochromatischem Lichte erscheint also die betreffende Linie im Spektroskope nach dem ultravioletten Ende hin verschoben. Bewegt sich das Licht von dem Beobachter fort, so vergrößert sich die Periode.

Die Aberration des Lichtes.

Die Aberrationserscheinungen sind dadurch gekennzeichnet, daß eine Lichtquelle, welche sich relativ zu einem Beobachter bewegt, von diesem an einem anderen Orte erblickt wird, als wo sie sich zur Zeit der Beobachtung tatsächlich befindet. Bewegt sich die Lichtquelle in der Linie der Strahlung, so erscheint sie zwar in der wirklichen Richtung, aber in einem von der wirklichen Entfernung abweichenden Abstande. Bildet die Bewegungsrichtung einen Winkel mit der Strahlrichtung, so erscheint das Licht in einem anderen Winkel. Diese Erscheinungen sind nach den vorausgegangenen mehrfachen Erörterungen leicht verständlich. Es tritt eben an Stelle der Richtungskonstanten $\mathfrak{R}_{01}$ der Strahlung, welche von einer ruhenden Lichtquelle herrührt, die Konstante r_1. Siehe Glei-

chungen (14) und (15) dieses Paragraphen. Wir hatten die Gleichung, die direkt aus Betrachtung der Figur folgt,

$$r\frac{\mathfrak{u}}{v} + R_0\mathfrak{R}_{01} = \mathfrak{r}.$$

Wir ersetzen wieder im ersten Term, weil er den Faktor $\frac{\mathfrak{u}}{v}$ enthält, r durch R_0 und erhalten

$$R_0\left(\mathfrak{R}_{01} + \frac{\mathfrak{u}}{v}\right) = \mathfrak{r}.$$

Um daher die Richtung von $\mathfrak{r}$ zu erhalten, brauchen wir nur den Vektor $\mathfrak{R}_{01}$ zum Vektor $\frac{\mathfrak{u}}{v}$ zu addieren.

Man kann auch noch in anderer Weise die Richtung von $\mathfrak{r}_1$ finden. Betrachtet man nämlich das Argument des Sinus in den Gleichungen (14) und (15) und vergleicht es mit dem Argumente, welches im Ausdrucke für eine ruhende Lichtquelle vorkommt, so erkennt man, daß an die Stelle von

$$t - \frac{\mathfrak{R}_0\mathfrak{R}_{01}}{v}$$

der Wert

$$t - \frac{\mathfrak{R}_0}{v}\left(\mathfrak{R}_{01} + \frac{\mathfrak{u}}{v}\right)$$

getreten ist. D. h. an Stelle der Richtungskonstanten $\mathfrak{R}_{01}$ haben wir die Richtung von

$$\mathfrak{R}_{01} + \frac{\mathfrak{u}}{v}. \tag{16}$$

Die Intensität der Strahlung von einer sich bewegenden Lichtquelle.

In dem vorhergehenden Paragraphen war die von einem schwingenden Elektron ausgesandte Energie berechnet worden unter der Voraussetzung, daß der Schwingungsmittelpunkt ruht. Die Gleichungen (20) und (21) setzen uns in den Stand, auch die Intensität der Strahlung zu berechnen für den Fall, daß die Lichtquelle sich translatorisch bewegt. Wir wollen zunächst annehmen, daß der Beobachter, welcher die Intensität messen will, ruht. Zur Vereinfachung setzen wir voraus, daß der

Beobachter sich in der Bewegungslinie des Lichtes befinde und daß das Licht sich auf ihn zu bewege. Die Schwingungsrichtung sei senkrecht zur Richtung der Translation.

Dann wird gemäß den Gleichungen (14) und (15) der Absolutwert von $\mathfrak{E}$ und von $\mathfrak{H}$

$$E = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \left(1 + \frac{u}{v}\right) \frac{qa}{R_0} \sin \frac{2\pi}{T}\left[t - \frac{R_0}{v}\left(1 + \frac{u}{v}\right)\right],$$

$$H = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \left(1 + \frac{u}{v}\right) \frac{qa}{R_0 v} \sin \frac{2\pi}{T}\left[t - \frac{R_0}{v}\left(1 + \frac{u}{v}\right)\right].$$

Beachtet man, daß $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{H}$ senkrecht steht, so findet man für den Absolutwert des Poyntingschen Vektors

$$J = \frac{1}{4\pi} EH = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^4 \frac{a^2 q^2}{R_0^2 v} \left(1 + \frac{u}{v}\right)^2 \sin^2 \frac{2\pi}{T}\left[t - \frac{R_0}{v}\left(1 + \frac{u}{v}\right)\right].$$

Der Mittelwert hiervon während einer Sekunde ist, wenn wir die diesbezügliche im vorigen Paragraphen angestellte Rechnung wiederholen,

$$J = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^4 \frac{a^2 q^2}{8\pi v R_0^2} \left(1 + \frac{u}{v}\right)^2.$$

Dies ist die Energiemenge, welche pro Zeiteinheit von der senkrecht zur Strahlenrichtung gestellten Flächeneinheit eines absolut absorbierenden Körpers aufgenommen wird.

Wir können nun weiterhin die Frage stellen, wie groß ist die Intensität der Strahlung, wenn der erwähnte schwarze Körper und die Lichtquelle eine gemeinsame Bewegung besitzen. Wird z. B. die Intensität irdischer Lichtquellen durch die jährliche Bewegung der Erde beeinflußt? Eine sorgfältige Untersuchung P. Nordmayers hat die Abwesenheit eines Einflusses ergeben. Dies steht im Einklange mit der Theorie. Um dies zu zeigen, folgen wir den Ausführungen von Lorentz und knüpfen an die für J gefundene Gleichung an. Die von dem schwarzen Körper absorbierte Energie wird nämlich aus zwei Ursachen geändert, wenn wir ihm nunmehr dieselbe Geschwindigkeit erteilen wie der Lichtquelle.

Bedeutet in der Figur A eine irdische Lichtquelle, ω' die im Äther ruhende Bodenfläche des Zylinders C und ω die an

der Erdbewegung teilnehmende Einheitsfläche, so wird, wenn die Bewegungsrichtung $A\omega$ ist, der Energieinhalt des Zylinders zunehmen, und zwar um den Betrag

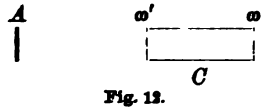

Fig. 12.

$$uU$$

in der Zeiteinheit, wenn U den Energieinhalt des Äthers pro Volumeneinheit bedeutet. Der Energieinhalt des Äthers pro Volumeneinheit ist aber gleich dem Energiestrome J pro Flächeneinheit dividiert durch die Geschwindigkeit des Energiestromes, d. h. dividiert durch v. Dann ist die Energiezunahme des Zylinders

$$uU = \frac{Ju}{v} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^4 \frac{a^2 q^2 u}{v^2 8\pi R_0^2}$$

pro Zeiteinheit. Um diesen Betrag verringert sich aber die von ω aufgenommene Energie.

Ferner verringert sich diese infolge der von der Druckkraft der Strahlung geleisteten Arbeit. Die auf die Flächeneinheit des schwarzen Körpers wirkende Kraft ist numerisch gleich dem Energieinhalte der Volumeneinheit, also gleich $U = \frac{J}{v}$. Da die Fläche sich in der Sekunde u cm bewegt, so leistet diese Kraft eine Arbeit

$$\frac{Ju}{v}.$$

Diese Arbeit kann nur auf Kosten der von dem schwarzen Körper aufgenommenen Energie geleistet werden. Im ganzen nimmt daher der schwarze Körper pro Zeiteinheit auf

$$J_0 = J - 2\frac{Ju}{v}.$$

Setzt man obigen Wert von J ein und berücksichtigt man, daß höhere Potenzen von $\frac{u}{v}$ vernachlässigt werden, so wird

$$J_0 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^4 \frac{a^2 q^2}{8\pi v R_0^2},$$

d. h. die Intensität irdischer Lichtquellen wird durch die Erdbewegung nicht beeinflußt.

§ 15.

Der Einfluß der Erdbewegung auf die Optik irdischer Lichtquellen.

Im vorigen Paragraphen hatten wir die Werte der elektrischen und der magnetischen Kraft für einen im Äther ruhenden Punkt gefunden für den Fall, daß eine Lichtquelle sich relativ zu diesem Punkte bewegt. Wir stellen uns jetzt die Frage, wie gestaltet sich die Kraftwirkung, welche eine an der translatorischen Bewegung teilnehmende Einheitsladung und ein an der Bewegung teilnehmender magnetischer Einheitspol erfährt; mit anderen Worten, welche Werte von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ wird ein an der translatorischen Bewegung des schwingenden Elektrons teilnehmender Beobachter in beliebigen Punkten des Feldes wahrnehmen. — Wir wollen die von diesem Beobachter wahrgenommenen Werte der elektrischen und der magnetischen Kraft mit $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{H}'$ bezeichnen.

Bei Ableitung der elektrodynamischen Kräfte hatten wir die Gleichungen für die magnetische und die elektrische Kraft, wie sie von einem an der Translation teilnehmenden Beobachter gemessen werden, entwickelt. Sind nämlich $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ die Kräfte, welche auf den im Äther ruhenden Einheitspol bzw. auf eine ruhende Einheitsladung ausgeübt werden, wenn der Erreger des elektromagnetischen Feldes sich mit der Geschwindigkeit u translatorisch bewegt, so sind die Kräfte $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{H}'$ bei gemeinsamer Geschwindigkeit von Erreger und Beobachter bestimmt durch

$$\mathfrak{E}' = \mathfrak{E} - V\mathfrak{H}u, \tag{1}$$

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} - \frac{1}{v^2} V u\mathfrak{E}. \tag{2}$$

Nun sind $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ durch die Gleichungen (14) und (15) im vorigen Abschnitte bestimmt. Zwischen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ bestehen die allgemeineren Beziehungen

$$\mathfrak{E} = vV\mathfrak{H}r_1, \tag{3}$$

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{v} V r_1 \mathfrak{E}. \tag{4}$$

Die Gleichungen (1) und (2) können daher auch geschrieben werden

$$\mathfrak{E}' = v\mathrm{V}\mathfrak{H}\mathfrak{r}_1 - \mathrm{V}\mathfrak{H}\mathfrak{u}, \tag{5}$$

$$\mathfrak{H}' = \frac{1}{v}\mathrm{V}\mathfrak{r}_1\mathfrak{E} - \frac{1}{v}\mathrm{V}\frac{\mathfrak{u}}{v}\mathfrak{E} \tag{6}$$

oder

$$\mathfrak{E}' = v\mathrm{V}\mathfrak{H}\left(\mathfrak{r}_1 - \frac{\mathfrak{u}}{v}\right), \tag{7}$$

$$\mathfrak{H}' = \frac{1}{v}\mathrm{V}\left(\mathfrak{r}_1 - \frac{\mathfrak{u}}{v}\right)\mathfrak{E}. \tag{8}$$

Konstruiert man nun ein Dreieck aus den Vektoren $\frac{\mathfrak{u}}{v}$ und $\mathfrak{R}_{01}$ und erinnert sich dann des über die Aberration Gesagten [siehe § 14 Gleichung (16)], so erkennt man, daß

$$\mathfrak{r}_1 - \frac{\mathfrak{u}}{v} = \mathfrak{R}_{01}\left(1 - \frac{\mathfrak{u}}{v}\mathfrak{r}_1\right). \tag{9}$$

Ersetzen wir in dem Ausdrucke

$$\frac{\mathfrak{u}}{v}\mathfrak{r}_1$$

$\mathfrak{r}_1$ durch $\mathfrak{R}_{01}$, so machen wir einen zu vernachlässigenden Fehler von der Ordnung $\frac{u^2}{v^2}$. Folglich nehmen $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{H}'$ die Form an

$$\mathfrak{E}' = \left(1 - \frac{\mathfrak{u}\mathfrak{R}_{01}}{v}\right)v\mathrm{V}\mathfrak{H}\mathfrak{R}_{01}, \tag{10}$$

$$\mathfrak{H}' = \left(1 - \frac{\mathfrak{u}\mathfrak{R}_{01}}{v}\right)\frac{1}{v}\mathrm{V}\mathfrak{E}\mathfrak{R}_{01}. \tag{11}$$

Setzen wir schließlich die durch (14) und (15) bestimmten Werte von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ ein und beachten, daß

$$\left(\frac{\mathfrak{u}}{v}\mathfrak{R}_{01}\right)^2$$

vernachlässigt wird,

$$\mathfrak{E}' = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{q}{R_0}\sin\frac{2\pi}{T}\left[t - \frac{R_0}{v}\left(1 + \frac{\mathfrak{u}\mathfrak{R}_{01}}{v}\right)\right]\mathrm{V}\mathfrak{R}_{01}\mathrm{V}\mathfrak{R}_{01}\mathfrak{a}, \tag{12}$$

$$\mathfrak{H}' = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{q}{R_0}\sin\frac{2\pi}{T}\left[t - \frac{R_0}{v}\left(1 + \frac{\mathfrak{u}\mathfrak{R}_{01}}{v}\right)\right]\mathrm{V}\mathfrak{a}\mathfrak{R}_{01}. \tag{13}$$

Nach dem Vorgange von H. A. Lorentz führen wir eine Ortszeit ein, d. h. wir setzen

$$t' = t - \frac{u\mathfrak{R}_0}{v^2}. \tag{14}$$

Dann nehmen die Gleichungen für die gemeinsame Bewegung von Lichtquelle und Beobachter die Form an

$$\mathfrak{E}' = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{q}{R_0} \sin\frac{2\pi}{T}\left[t' - \frac{R_0}{v}\right] V\mathfrak{R}_{01} V\mathfrak{R}_{01}\mathfrak{a}, \tag{15}$$

$$\mathfrak{H}' = \frac{2\pi}{T}\frac{q}{R_0 v} \sin\frac{2\pi}{T}\left[t' - \frac{R_0}{v}\right] V\mathfrak{a}\mathfrak{R}_{01}. \tag{16}$$

Vergleicht man diese Ausdrücke mit denjenigen, welche für ruhende Lichtquellen galten, so erkennt man die Richtigkeit des zuerst von Lorentz auf andere Weise abgeleiteten Satzes:

> Ist für ein System ruhender Körper ein Bewegungszustand bekannt, bei dem
>
> $$\mathfrak{D},\ \mathfrak{E},\ \mathfrak{H}$$
>
> gewisse Funktionen von x, y, z und t sind, so kann in demselben Systeme, falls es sich mit der Geschwindigkeit u verschiebt, ein Bewegungszustand bestehen, bei welchem $\mathfrak{D}', \mathfrak{E}', \mathfrak{H}'$ ebendieselben Funktionen von x, y, z und t', d. h. von
>
> $$t - \frac{u\mathfrak{R}_0}{v^2}$$
>
> sind.

Der Beweis dieses wichtigen Satzes ist hier für eine einfache harmonische Bewegung eines Elektrons geführt. Erinnert man sich aber des Fourierschen Satzes, gemäß welchem eine ganz beliebige einzelwertige periodische Funktion durch eine Summe von Sinusfunktionen darstellbar ist, so liegt auf der Hand, daß der Beweis ohne weiteres auch für beliebige periodische Bewegungen der Elektronen gilt. Und periodische Bewegungen kommen für die Optik allein in Betracht.

Die Wichtigkeit der Gleichungen (15) und (16) für die Optik irdischer Lichtquellen liegt zu offen zutage, um besonders hervorgehoben zu werden. Einige der wichtigeren

Folgerungen seien bemerkt. Wir beschränken uns dabei auf Erscheinungen, welche durch die Materie nicht wesentlich bedingt sind.

1. In dem bewegten Systeme haben die elektromagnetischen Kräfte dieselbe Periode wie im ruhenden. Diese Periode ist natürlich verschieden von derjenigen, welche von einem im Äther ruhenden Beobachter wahrgenommen wird, wie bei der Erörterung des Dopplerschen Prinzips gezeigt wurde. Letztere Periode wird als die absolute bezeichnet, im Gegensatze zur relativen, welche bei gemeinsamer Bewegung in Frage kommt.

Die Gleichheit der Periode im ruhenden Systeme — in diesem ruhen Lichtquelle und Beobachter relativ zum Äther — und im bewegten Systeme — Lichtquelle und Beobachter haben gemeinsame Bewegung — ergibt sich direkt aus der Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)_{R_0}.$$

2. An Stellen, wo im ruhenden Systeme $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{E}$ verschwinden, werden auch im bewegten Systeme $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{E}'$ verschwinden. Betrachtet man daher im ruhenden Systeme ein zylindrisches Strahlenbündel, so entspricht diesem Bündel ein ebenso begrenztes im bewegten Systeme, und daraus können wir weiter schließen, daß relative Lichtstrahlen in derselben Weise reflektiert werden wie in einem ruhenden Systeme.

3. Der Umstand, daß gemäß den Gleichungen (15) und (16) $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{E}'$ gleichzeitig mit $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ verschwinden, hat weiter zur Folge, daß bei Interferenzerscheinungen dunkle und helle Streifen in den beiden betrachteten Systemen — wir wollen sie mit Lorentz korrespondierende Systeme nennen — an denselben Stellen liegen.

4. Eine Betrachtung der Gleichungen der korrespondierenden Systeme ergibt, daß die Wellennormalen nicht miteinander übereinstimmen. In der Tat erhält man, wie bereits früher erörtert worden ist, die Richtung der Wellennormale des relativen Strahles $\mathfrak{r}_1$, wenn man zur Wellennormale $\mathfrak{N}_{01}$ des Strahles im ruhenden Systeme den Vektor $\frac{\mathfrak{u}}{v}$ addiert.

Der Michelson-Morleysche Interferenzversuch.

Die Übereinstimmung der beiden betrachteten Systeme ergibt sich gemäß der Ableitung, wenn Größen von der Ordnung $\frac{u^2}{v^2}$ vernachlässigt werden. Im allgemeinen sind Wirkungen, welche von dieser sehr kleinen Größe abhängen, nicht meßbar. Es gibt aber gewisse Interferenzerscheinungen, welche nach der Lorentzschen Theorie dennoch einen beobachtbaren Einfluß der Erdbewegung erkennen lassen sollten. Michelson und Morley haben Versuche in dieser Richtung unternommen und die Theorie nicht bestätigt gefunden. Im wesentlichen besteht das Experiment darin, daß zwei Lichtstrahlen, von denen der eine in der Bewegungslinie der Erde eine bestimmte Strecke hin- und hergegangen ist und der andere dieselbe Strecke in einer Linie senkrecht zur Erdbewegung, zur Interferenz gebracht werden. Da die Zurücklegung der Strecken verschiedene Zeit erfordert, je nach der Orientierung zur Richtung der Erdbewegung, so entsteht eine Phasendifferenz, welche sich durch Verschiebung der Interferenzstreifen bemerkbar machen muß, wenn der Apparat um 90° gedreht wird.

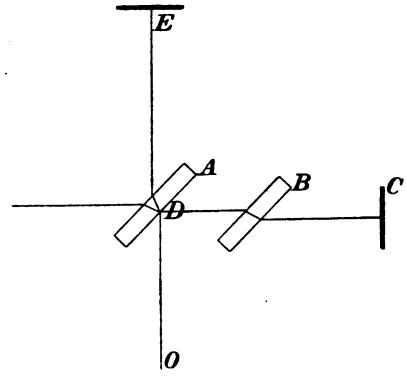

Fig. 13.

Der Lichtstrahl geht durch die planparallele Platte A und wird bei D teilweise nach E zurückgeworfen, teilweise nach Passieren einer zweiten planparallelen Platte B bei C reflektiert. Der von E zurückgeworfene Strahl gelangt nach D zurück und von da nach O, wo er mit dem von C zurückkehrenden zweiten Lichtstrahle zur Interferenz gebracht wird. Macht man die Strecken ED und DC genau gleich und fällt DC in die Bewegungsrichtung der Erde, so braucht der

Strahl, welcher zwischen D und C hin- und hergegangen ist, eine andere Zeit als der zwischen E und D gehende Strahl. Die entsprechende Phasendifferenz ruft eine Interferenz hervor. Die Interferenzstreifen müssen sich verschieben, wenn durch Drehung um 90° ED in die Erdrichtung gebracht wird.

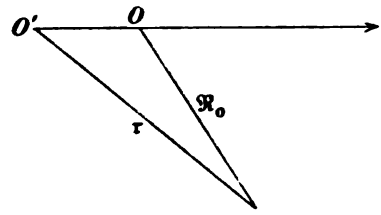

Fig. 14.

Berechnen wir, ohne Größen von der Ordnung $\frac{u^2}{v^2}$ zu vernachlässigen, die Entfernung, in welcher sich eine Lichtquelle befand, als sie das zur Beobachtungszeit in P eintreffende Licht aussandte.

Nach der Figur ist

$$r^2 = \frac{u^2}{v^2} r^2 + R_0^2 + 2 \frac{u}{v} r \mathfrak{R}_0 .$$

Daraus folgt bei Vernachlässigung höherer Potenzen als $\frac{u^2}{v^2}$

$$r = R_0 \left[1 + \frac{u \mathfrak{R}_{01}}{v} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{v^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{u \mathfrak{R}_{01}}{v} \right)^2 \right].$$

Machen wir, um das Ergebnis auf das Experiment anwenden zu können, $DC = R_0$, so wird die scheinbare Entfernung zwischen D und C, wenn wir beachten, daß die Erdgeschwindigkeit u mit $\mathfrak{R}_{01}$ beim Hingange des Strahles nach C einen Winkel gleich Null bildet,

$$r = R_0 \left[1 + \frac{u}{v} + \frac{u^2}{v^2} \right].$$

Also brauchte der Strahl zum Hingange nach C die Zeit

$$\frac{R_0}{v} \left[1 + \frac{u}{v} + \frac{u^2}{v^2} \right].$$

Bei dem Rückgange brauchte der Strahl die Zeit

$$\frac{R_0}{v} \left[1 - \frac{u}{v} + \frac{u^2}{v^2} \right],$$

indem für den Rückgang $u_1 R_{01} = -1$.

Folglich braucht das Licht für den Hin- und Hergang zwischen C und D die Zeit

$$\frac{2R_0}{v}\left(1+\frac{u^2}{v^2}\right).$$

Man findet auch leicht die Zeit, welche beim Hin- und Hergange des Lichtes zwischen D und E verbraucht wird, wenn man beachtet, daß dann der Winkel zwischen $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{R}_{01}$ 90^0 bzw. 270^0 beträgt. Man findet

$$\frac{2R_0}{v}\left[1+\frac{1}{2}\frac{u^2}{v^2}\right].$$

Daher ist die Differenz der Zeit, welche das Licht zum Hin- und Hergange in den zueinander senkrechten Richtungen nötig hat,

$$\frac{R_0}{v}\frac{u^2}{v^2}.$$

Diesem Zeitunterschied entspricht ein gewisser Phasenunterschied, welcher bei der Interferenz sich geltend macht. Offenbar ist der Zeitunterschied

$$-\frac{R_0}{v}\frac{u^2}{v^2},$$

wenn der Apparat um 90^0 gedreht wird.

Die Änderung der Interferenzerscheinung bei der Drehung muß daher einer Zeitdifferenz von

$$2\frac{R_0}{v}\frac{u^2}{v^2}$$

entsprechen.

Michelson und Morley konnten bei ihren sehr sorgfältigen Versuchen keine Änderung in den Interferenzerscheinungen bei der Drehung ihres Apparates entdecken. Dieses Resultat wäre verhängnisvoll für die Theorie des ruhenden Äthers, wenn nicht Lorentz eine Erklärung des Versuchsergebnisses ersonnen hätte. Lorentz macht die Annahme, daß alle Dimensionen der Körper in Richtung der

Bewegung durch den Äther eine Verkürzung im Verhältnisse $1:1-\frac{1}{2}\frac{u^2}{v^2}$ erleiden. Man hätte also anstatt

$$DC = R_0$$

$$DC = R_0\left(1-\frac{1}{2}\frac{u^2}{v^2}\right).$$

Daraus würde folgen, daß beim Hin- und Hergange zwischen D und C eine Zeit

$$\frac{2R_0}{v}\left(1-\frac{1}{2}\frac{u^2}{v^2}\right)\left(1+\frac{u^2}{v^2}\right) = \frac{2R_0}{v}\left(1+\frac{1}{2}\frac{u^2}{v^2}\right)$$

nötig wäre, also ebensoviel wie für den Hin- und Hergang zwischen D und E. Dann wäre das negative Ergebnis des Michelson-Morleyschen Versuches erklärt.

Diese ad hoc ersonnene Hypothese von der Längenänderung ist im Grunde ein unbefriedigender Notbehelf. Der Michelson-Morleysche Interferenzversuch ist ein schwerwiegendes Hindernis, welches sich der allgemeinen Annahme nicht nur der Lorentzschen Theorie, sondern aller ernstlich in Frage kommenden Äthertheorien entgegenstellt. Deshalb hat denn Lorentz, wie bereits bei Ableitung der Masse eines deformierten Elektrons erwähnt wurde, eine neue Hypothese eingeführt, welche, wenn sie auch nicht in demselben Grade willkürlich ist wie die erwähnte und wenn sie auch von der Gesamtheit der Erscheinungen ein viel befriedigenderes Bild liefert, doch noch erhebliche Schwierigkeiten in sich birgt.

H. A. Lorentz nimmt nicht nur an, daß ein bewegtes Elektron in der erörterten Weise deformiert werde, sondern daß alle in die Bewegungsrichtung fallenden Dimensionen eines bewegten Systems im Verhältnis $\sqrt{1-\frac{u^2}{v^2}}:1$ verkürzt werden.

Lorentz setzt in das Gleichungssystem, welches das elektromagnetische Feld eines translatorisch bewegten schwingenden Elektrons bestimmt, neue Variable ein. Das ursprüngliche System hat, wie früher gezeigt worden ist, wenn wir mitgeführte Koordinaten anwenden, die Schwingungsgeschwindigkeit mit η bezeichnen und die translatorische

in die Richtung der zunehmenden x fallende wie bisher mit $\mathfrak{u}$, die Form

$$\nabla \mathfrak{D} = 0, \quad \nabla \mathfrak{H} = 0,$$

$$\operatorname{curl} \mathfrak{H} = 4\pi\varrho(\mathfrak{n}+\mathfrak{u}) + 4\pi\left[\frac{\partial}{\partial t} - (\mathfrak{u}\nabla)\right]\mathfrak{D},$$

$$4\pi v^2 \operatorname{curl} \mathfrak{D} = -\left[\frac{\partial}{\partial t} - (\mathfrak{u}\nabla)\right]\mathfrak{H},$$

$$\mathfrak{F} = 4\pi v^2 \mathfrak{D} + V\mathfrak{H}(\mathfrak{u}+\mathfrak{n}).$$

In dieses System führen wir neue Veränderliche ein, indem wir setzen

$$x' = \sqrt{s}\,x; \quad y' = y; \quad z' = z,$$

$$t' = \frac{t}{\sqrt{s}} - \sqrt{s}\,\frac{u}{v^2}x.$$

Ferner definieren wir die neuen Vektoren $\mathfrak{D}'$ und $\mathfrak{H}'$

$$D_1' = D_1; \quad D_2' = \sqrt{s}\left(D_2 - \frac{u}{4\pi v^2}H_3\right); \quad D_3' = \sqrt{s}\left(D_3 + \frac{u}{4\pi v^2}H_2\right).$$

Indem das Volumen bei der Bewegung verringert wird, ändert sich die elektrische Dichte, so daß

$$\frac{1}{\sqrt{s}}\varrho = \varrho'.$$

Die Schwingungsgeschwindigkeit $\mathfrak{n}$ wird ebenfalls geändert, indem gesetzt wird

$$s n_1 = n_1'; \quad \sqrt{s}\,n_2 = n_2'; \quad \sqrt{s}\,n_3 = n_3'.$$

Hierdurch nehmen die Gleichungen die Form an

$$\begin{cases} \nabla' \mathfrak{D}' = \left(1 - \frac{u n_1'}{v^2}\right)\varrho' & \nabla' \mathfrak{H}' = 0 \\ \operatorname{curl}' \mathfrak{H}' = 4\pi\left(\varrho' \mathfrak{u}' + \frac{\partial \mathfrak{D}'}{\partial t'}\right) & \\ 4\pi v^2 \operatorname{curl}' \mathfrak{D}' = -\frac{\partial \mathfrak{H}'}{\partial t'}. & \end{cases}$$

Dieses Gleichungssystem gestattet $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{D}'$ durch die Potentiale φ' und $\mathfrak{A}'$ darzustellen und zwar auf Grund derselben Überlegungen, mittels welcher wir früher die Potentiale φ und $\mathfrak{A}$ abgeleitet haben. Daher kann gesetzt werden

$$\varphi' = \int \frac{[\varrho]}{r'} d\tau,$$

$$\mathfrak{A}' = \int \frac{[\varrho \mathfrak{u}']}{r'} d\tau,$$

wo

$$r' = \sqrt{s(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}.$$

x, y, z sind die Koordinaten des Punktes P, für welche φ' und $\mathfrak{A}'$ zu bestimmen sind, x_1, y_1 und z_1 die Koordinaten des Raumelementes zur Zeit $t' - \frac{r'}{v}$.

Bei der Integration sind diejenigen Werte von ϱ und $\varrho \mathfrak{u}'$ zu nehmen, welche in dem betreffenden Volumenelemente zur Zeit

$$t' - \frac{r'}{v}$$

bestanden. Dies wird durch die eckigen Klammern angedeutet.

Lorentz zeigt an der Hand der abgeleiteten Gleichungen, wie diejenigen Versuche, welche der früheren Theorie Schwierigkeiten bereiten, im Einklange mit den gemachten Voraussetzungen sind.

Beachtet man, daß in dem bewegten Systeme die Dimensionen, welche in die Bewegungsrichtung fallen, im Verhältnis $s^{\frac{1}{2}} : 1$, d. h. annähernd im Verhältnis $1 - \frac{1}{2}\frac{u^2}{v^2} : 1$ verkürzt werden, so leuchtet nach dem vorhergehenden ein, daß nunmehr dieselbe Zeit erforderlich ist, damit das Licht gleiche Strecken in der Bewegungslinie und senkrecht zur Bewegungslinie zurücklege. — Es würde zu weit führen, wollten wir die Konsequenzen der neuen Hypothese von H. A. Lorentz für alle elektromagnetischen Erscheinungen prüfen. Lorentz hat l. c. gezeigt, daß die Hauptschwierigkeiten, welche die frühere Fassung seiner Theorie — genauer gesprochen auch der Maxwellschen Theorie — bot, durch Einführung dieser neuen Annahme verschwinden. Auch von anderer Seite sind Versuche gemacht worden, durch mehr oder weniger künstliche Annahmen die Widersprüche, welche den Äthertheorien inhärent sind, aus dem Wege zu räumen. Der Erfolg scheint mir wenig

befriedigend. Will man zu einem objektiven Urteil über den gegenwärtigen Stand der elektromagnetischen Theorien gelangen, so darf man nicht den Zusammenhang der neuesten Entwickelungen mit den älteren Elektrizitätstheorien aus dem Auge verlieren. Es wurde hierauf schon in der Einleitung aufmerksam gemacht. Was Gauß, Weber, Graßmann, Riemann und die beiden Neumann für beschränkte Gebiete der Elektrodynamik erstrebt hatten: die Gesetzmäßigkeiten der elektromagnetischen Erscheinungen auf die Lage und die Bewegungen der Elementarquanten zurückzuführen, diese Aufgabe ist durch das Faraday-Maxwellsche Bild eines vermittelnden Äthers in ungeahnter Weise ihrer Lösung näher gebracht worden.

So hat sich denn die Voraussicht von Gauß bestätigt, daß eine „konstruierbare Vorstellung" von der zeitlichen Ausbreitung elektrodynamischer Kräfte weiterführen würde. Der Äther hat das Gerüst zu einem imposanten Bauwerke geliefert, welches in seinen organischen Gliederungen früher getrennte Teile der Physik vereinigt. Aber der Äther ist doch Gerüst geblieben! Es fragt sich nur, ob die Zeit gekommen ist, das Gerüst abzubrechen, um den Bau in seiner Größe und Schönheit dem Blicke zu zeigen. Über diese Frage wird die kommende Zeit ihr Urteil abzugeben haben. Die Gefahr, daß das Gerüst mit dem Bau verwachsen könnte, ist vorhanden.

Nach Ansicht des Verfassers bedeutet es einen Fortschritt, wenn auf das Bild des Äthers jetzt schon verzichtet wird. Man vermeidet dadurch die komplizierten und sehr künstlichen Hypothesen über die Änderung der Dimensionen der Körper durch den Einfluß der Bewegung. Die Lorentz-Maxwellschen Gleichungen in ihrer ursprünglichen Form bleiben bestehen, werden aber so gedeutet, daß die Differentialkoeffizienten nach der Zeit verschwinden, wenn ein abgeschlossenes System eine rein translatorische Bewegung besitzt. D. h. anstatt nach Lorentz zu setzen

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} - (\mathfrak{u}\nabla),$$

setzt man allgemein

$$\frac{d}{dt} = \frac{\bar{c}}{\bar{c}t},$$

also bei rein translatorischer Bewegung für einen beliebigen Vektor $\mathfrak{C}$

$$\frac{d\mathfrak{C}}{dt} = 0.$$

Die oben betrachteten korrespondierenden Systeme werden dann absolut identisch. Demgemäß ändert sich die Kraftwirkung zweier Elektronen nicht durch translatorische Bewegung, solange sich hierbei die relative Lage der beiden Elektronen zueinander nicht ändert. Hieraus darf aber nicht geschlossen werden, daß eine beliebige Bewegung eines abgeschlossenen Systems keine Wirkung ausüben könne. Im allgemeinen tritt bei jeder krummlinigen Bewegung eine Änderung in der dynamischen Wirkung der Teile eines Systems aufeinander auf. Liegen z. B. zwei Elektronen an den Endpunkten eines rotierenden Kreisdurchmessers, so ist in jedem Zeitpunkte die Kraftwirkung dieselbe, als ob das eine Elektron ruhte und das andere im Abstande des Durchmessers mit der Geschwindigkeit $2wr$ sich geradlinig vorbeibewegte.

Es läßt sich leicht absehen, daß die Gesetzmäßigkeiten aller bekannten elektromagnetischen Erscheinungen durch das so modifizierte Lorentz-Maxwellsche Gleichungssystem ihren richtigen Ausdruck erhalten. Dies trifft auch zu in der Elektronentheorie des größeren Maßstabes, welche wir im nächsten Paragraphen erörtern werden.

Worauf es bei einer Entscheidung der aufgeworfenen Frage ankommt, ist dies. Liefert das Bild des Äthers ein so mächtiges Mittel zur Erleichterung des Erkennens und des Denkens auf dem Gebiete des Elektromagnetismus, daß man die künstlichen Hypothesen, welche H. A. Lorentz ersonnen hat, um dieses Bild in Übereinstimmung mit der Erfahrung zu bringen, ertragen will? Oder ist die Einfachheit des modifizierten Gleichungssystems und seine absolute Übereinstimmung mit unseren bisherigen Erfahrungen ausschlaggebend? Die

letztere Alternative wäre ganz im Einklange mit einer bekannten Bemerkung von H. Hertz, welche ein rein phänomenologisches Verfahren empfiehlt — nachdem man durch zweckmäßige Bilder zu einer Erkenntnis der Gesetzmäßigkeiten gelangt ist.

§ 16.

Die ponderable Materie in der Elektronentheorie.

Bei unseren bisherigen Betrachtungen haben wir uns auf die Ableitung von Gesetzmäßigkeiten beschränkt, welche auf das einzelne Elektron anwendbar sind und welche bei vergrößertem Maßstabe keine Änderung erleiden.

Nunmehr wenden wir uns zu einer Betrachtung von Phänomenen, bei welchen das Zusammenwirken großer Komplexe von Elektronen und Atomen wesentlich ist. Wie wir bereits eingangs erwähnt haben, kommt es hierbei auf Bildung von Mittelwerten an. Nach Lorentz ist ein Mittelwert irgendeiner Größe L im Punkte P definiert durch die Gleichung

$$\bar{L} = \frac{1}{\tau}\int L\, d\tau,$$

wo L ein Skalar oder ein Vektor sein kann und wo der Raum τ eine im physikalischen Sinne sehr kleine Größe bedeutet. Physikalisch klein ist eine Größe, wenn sie gegen beobachtbare Größen verschwindet.

Zur Bildung von Mittelwerten stellen wir im Anschluß an Lorentz folgende Überlegungen an.

In einem Raume seien zahlreiche Punkte P mit der Häufigkeit wie die kleinsten Teilchen der Materie homogen verteilt. Zieht man von diesen Punkten gleiche und gleich gerichtete Radienvektoren $\mathfrak{r}$ von der Größenordnung des Flächenelementes $d\mathfrak{g}$, so berechnen wir zunächst, wieviele von den Radienvektoren von der physikalisch sehr kleinen Fläche dg geschnitten werden. Hierbei soll die Zahl mit positivem oder negativem Vorzeichen genommen werden, je nachdem die Endpunkte der Radienvektoren auf der einen oder anderen Seite

von dg liegen. Befinden sich N Punkte in der Volumeneinheit, so ist die Zahl

(1) $$N\mathfrak{r}\,dg.$$

In dem Raume mögen die Teilchen eine beliebige Eigenschaftsgröße q besitzen, welche an verschiedenen Orten eines Teilchens variieren, und zwar so, daß für jedes Teilchen

$$\Sigma q = 0.$$

Zieht man von einem beliebig gelegenen Punkte O im Teilchen Radienvektoren $\mathfrak{r}$ nach den verschiedenen Punkten in ihm, so darf man für ein Teilchen setzen

(2) $$\mathfrak{q} = \Sigma \mathfrak{r} q.$$

Weiter setzen wir für die N Teilchen, welche sich in der Volumeneinheit befinden,

$$\mathfrak{Q} = N\mathfrak{q}.$$

Es folgt dann

(3) $$Q = -\int \mathfrak{Q}\,dg.$$

Zur Bildung des Mittelwertes verfahren wir nach der gegebenen Vorschrift und erhalten

(4) $$\bar{q} = -\operatorname{div}\mathfrak{Q}.$$

Unter dem elektrischen Moment verstehen wir das Produkt aus der Ladung und der Verschiebung aus der Gleichgewichtslage oder allgemeiner aus seiner Lage; ist die Ladung des Elektrons ε, so ist

(5) $$\mathfrak{p} = \mathfrak{r}\varepsilon \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{p} = \int \varrho \mathfrak{r}\,d\tau.$$

Mit $\mathfrak{P}$ bezeichnen wir das elektrische Moment der Volumeneinheit. Sind N Teilchen in der Volumeneinheit enthalten, so wird

$$\mathfrak{P} = N\mathfrak{p} \quad \text{bzw.} \quad = \frac{1}{\tau}\Sigma\mathfrak{p}.$$

Gemäß Gleichung (3) erhält man für den Mittelwert von ϱ, d. h. für ϱ, soweit er von der Polarisation herrührt,

(6) $$\bar{\varrho} = -\operatorname{div}\mathfrak{P}.$$

Diese Gleichung legt es nahe, die in einem ponderablen Körper bestehende Verschiebung in zwei Anteile zu zerlegen, nämlich in den Anteil, welcher von dem Äther und von den Molekülen an und für sich herrührt.

Hieraus folgt

$$\overline{\mathfrak{D}} + \mathfrak{P} = \mathfrak{D}.$$

Es habe nun die betrachtete Materie als Ganzes die Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$. Die Elektronen mögen relativ zu ihrer Gleichgewichtslage eine Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ haben. Dann gilt für ein einzelnes Teilchen der Materie

$$\int \varrho \mathfrak{w}\, d\tau = 0.$$

Es sind also die Voraussetzungen erfüllt, unter welchen Gleichung (3) abgeleitet wurde. Daher ist

$$\overline{\varrho \mathfrak{w}} = -\nabla(\mathfrak{w}\mathfrak{P}).$$

Es gilt ferner für ein Elektron

$$\int \varrho \mathfrak{u}\, d\tau = \frac{dp}{dt}.$$

Da das Integral von Null verschieden ist, so ist Gleichung (3) nicht anwendbar. Wir müssen vielmehr setzen

$$\overline{\varrho \mathfrak{u}} = \frac{1}{\tau}\int \varrho \mathfrak{u}\, d\tau = \frac{1}{\tau}\frac{d}{dt}(\tau\mathfrak{P}) = \dot{\mathfrak{P}} + (\mathfrak{w}\nabla)\mathfrak{P} + \nabla\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{P}.$$

Man findet daher für denjenigen Teil des Verschiebungsstromes, welcher von der polarisierten Materie an und für sich herrührt,

$$\overline{\varrho \mathfrak{u}} + \overline{\varrho \mathfrak{w}} = \dot{\mathfrak{P}} + \operatorname{curl} \mathfrak{V}\mathfrak{P}\mathfrak{w}.$$

Die Untersuchungen von Pender und von Eichenwald über Röntgenströme haben die Richtigkeit dieser Beziehung bewiesen. Der von Röntgen zuerst beobachtete magnetische

Effekt, welcher auftritt, wenn eine dielektrische Scheibe im elektrischen Felde rotiert, rührt von einem Strome

$$\mathfrak{c} = \operatorname{curl} V \mathfrak{P} \mathfrak{w}$$

her. $\mathfrak{P}$ ist in diesem Falle Null. Nach der Theorie von Hertz wäre ein Strom vorhanden, welcher durch die gesamte Verschiebung bedingt wäre, d. h. es wäre

$$\mathfrak{c} = \operatorname{curl} V \mathfrak{D} \mathfrak{w}.$$

Der Versuch hat diese Gleichung als unzutreffend erwiesen. Nach der Hertzschen Theorie dürfte ein mit dem Dielektrikum rotierender Kondensator kein magnetisches Feld erzeugen. Das tatsächlich auftretende Feld hängt nur von der Potentialdifferenz der Belegungen ab, im Einklange mit der hier gegebenen Theorie.

Magnetisierungselektronen.

Wir bezeichnen mit magnetischem Moment den Ausdruck

$$\mathfrak{m} = \int \varrho V \mathfrak{r} \mathfrak{u} \, d\tau.$$

Das magnetische Moment der Volumeneinheit ist daher

$$N\mathfrak{m} = \mathfrak{M} = N \int \varrho V \mathfrak{r} \mathfrak{u} \, d\tau.$$

Nun ist für ein Teilchen $\varrho = 0$ und ferner ist

$$\int \varrho \mathfrak{u} \, d\tau = 0.$$

Es ist dann Gleichung (3) anwendbar. Wenn man daher setzt

$$q = \varrho \mathfrak{u},$$

so wird

$$\overline{\varrho \mathfrak{u}} = \operatorname{curl} \mathfrak{M}.$$

Wie die dielektrische Verschiebung können wir auch die magnetische Induktion $\mathfrak{B}$ in zwei Teile einteilen, von welchen

der eine von der magnetischen Polarisation des Äthers, der andere von der Materie an und für sich herrührt.

$$\overline{\mathfrak{H}} = \mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{M}, \tag{16}$$
$$\operatorname{div}\mathfrak{B} = 0.$$

Man kann die Grundgleichungen, welche das Feld im Innern des Dielektrikums bestimmen, aus den für das einzelne Elektron gültigen Gleichungen ableiten, indem man von beiden Seiten die Mittelwerte bildet. Man hat daher mit den bereits abgeleiteten Beziehungen das Gleichungssystem

$$\text{(I)} \qquad \operatorname{curl}\overline{\mathfrak{H}} = 4\pi\frac{d\overline{\mathfrak{D}}}{dt} + 4\pi\frac{d\mathfrak{P}}{dt} + 4\pi\operatorname{curl}\mathrm{V}\mathfrak{P}\mathfrak{w},$$

$$\text{(II)} \qquad 4\pi v^2\overline{\operatorname{curl}\mathfrak{D}} = -\frac{d\mathfrak{B}}{dt},$$

$$\text{(III)} \qquad \operatorname{div}\mathfrak{B} = 0,$$

$$\text{(IV)} \qquad -\operatorname{div}\mathfrak{P} = \bar{\varrho},$$

$$\text{(V)} \qquad \overline{\mathfrak{F}} = 4\pi v^2\overline{\mathfrak{D}} + \mathrm{V}\mathfrak{w}\mathfrak{B}.$$

§ 17.

Die Grundlagen der Dispersionstheorie.

Ein wichtiges Gebiet optischer Erscheinungen hatte schon frühe dazu genötigt, die molekulare Struktur der Materie zur Erklärung heranzuziehen; es ist das Gebiet der Dispersion und der Absorption. Die Maxwellsche Theorie reiht die Dielektrika in dieselbe Kategorie von Medien ein wie den Äther, und sie kann daher dem Umstande nicht Rechnung tragen, daß die elektromagnetischen Wellen sich mit einer Geschwindigkeit fortpflanzen, welche von der Periode der Schwingungen abhängt. Man war gezwungen, sich bestimmte Bilder von der Beschaffenheit der Moleküle und Atome und ihrer Bewegungsformen zu machen. Die so gewonnenen Vorstellungen lassen sich nun mit geringen Änderungen mit den Hypothesen vereinigen, zu welchen die in jüngster Zeit erforschten Elektronenphänomene geführt haben. Durch Helmholtz wurde die

Dispersionstheorie zuerst auf eine elektromagnetische Basis gestellt.

Es ist eine der Hauptannahmen der Dispersionstheorie, daß die elektrischen Ladungen der als Dipole gedachten Moleküle zu Schwingungen befähigt sind und daß sie zu diesen angeregt werden, wenn ein Lichtstrahl die Materie durchsetzt. Es sind die im Lichtstrahl tätigen elektrodynamischen Kräfte, welche auf die Ladungen der Moleküle wirken. Wenn auch die Art dieser Einwirkung verschieden aufgefaßt wird, so führen doch die einzelnen Theorien im wesentlichen zu denselben Resultaten. Sie unterscheiden sich durch den Grad, in welchem die Gesetzmäßigkeiten der Dispersion in Zusammenhang mit den Eigenschaftsgrößen der Materie gebracht werden.

Wenn wir dazu übergehen, das Bild, welches wir uns von der Einwirkung des Lichtstrahles auf die ponderablen Moleküle machen, zu präzisieren, so bieten sich große Schwierigkeiten dar. Vor allem besteht die Schwierigkeit in der Wahl einer zweckmäßigen Vorstellung von der Natur der irreversiblen Vorgänge, welche sich innerhalb der Materie abspielen, wenn ein Lichtstrahl sie durchsetzt. Es dürfte einleuchtend sein, daß die irreversiblen Erscheinungen, welche wir makroskopisch beobachten, zu reversiblen Erscheinungen werden, wenn wir den physikalisch unendlich kleinen Maßstab anlegen. Die Verhältnisse sind in dieser Beziehung ähnliche wie in der kinetischen Gastheorie. Man erinnere sich der Maxwellschen „kleinen Geister", welche aus dem Energieinhalte einer gleichmäßig temperierten Gasmasse Arbeitswerte schaffen. Die Absorption der Strahlungsenergie ohne weiteres auf „Reibung" zurückzuführen, geht nicht an; denn bei den sehr einfachen Annahmen, welche wir über die Natur des Elektrons gemacht haben, bliebe der Mechanismus der Reibung unbegreiflich. Auch scheint es mir nicht angängig, einem Elektron Leitfähigkeit zuzuschreiben. Denn wenn wir auch gezwungen sind, die Moleküle, welche von dem Lichtstrahl erregt werden, als elektromagnetische Resonatoren aufzufassen, so dürfen wir die Analogie mit einem gewöhnlichen Leitersysteme nicht so weit

ausdehnen, daß wir eine Leitung der Elektrizität, also einen irreversiblen Vorgang, welcher doch gerade durch die Bewegung der Elektronen erklärt werden soll, innerhalb eines Elektrons annehmen.

Es bedeutet einen Fortschritt in der Dispersionstheorie, daß A. B. Basset und später in eingehender Weise Planck die Dämpfung in ursächlichen Zusammenhang mit der natürlichen Energieabgabe eines schwingenden elektromagnetischen Systems durch Strahlung gebracht hat. Diese durch Strahlung abgegebene Energie ließe sich durch die mit physikalisch unendlich kleinen Resonatoren begabten Maxwellschen Geister als Arbeitswert ganz wiedergewinnen. Aber diese Energie muß bei Anlegung des makroskopischen Maßstabes als diffuse Strahlung verloren gehen. Während also bei einer gewöhnlichen erzwungenen elektromagnetischen Schwingung der erste Differentialkoeffizient der bekannten Gleichung

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = f(t)$$

eine direkte Beziehung zur irreversiblen Wärme hat, wird in der Dispersionstheorie dieser Koeffizient erst durch Anlegung eines größeren Maßstabes direkt mit dieser Wärme verknüpft.

Eine weitere Schwierigkeit, welche bei dem jetzigen Stande der Dispersionstheorie noch nicht gehoben ist, bildet die Frage nach der wirksamen elektrischen Kraft, d. h. der Kraft, welche das im Molekül enthaltene Elektron zu Schwingungen anregt. Im vorigen Paragraphen — siehe Gleichung 7 — wurde die Feldintensität im Innern eines polarisierten Dielektrikums bis auf einen konstanten Faktor abgeleitet. Es ist diejenige Kraft, welche nach Anlegung des größeren Maßstabes — das Dielektrikum erscheint dann als Kontinuum — in einem sehr schmalen Schnitt senkrecht zur Kraft auf eine Einheitsladung ausgeübt wird. Die äußere, die Polarisation verursachende Kraft war bei der Ableitung als konstant angenommen worden. Es fragt sich, ob diese innere Feldintensität als erregende Kraft betrachtet werden darf oder ob der Anteil, welcher von dem zu erregenden Elektron herrührt,

abzuziehen ist. Wir nehmen an, daß die lineare Durchschnittsdimension eines Elektrons klein sei im Vergleich mit dem Abstande eines Elektrons vom benachbarten. Denkt man sich dann eine sehr kleine Kugel im Dielektrikum beschrieben und die Moleküle aus ihr entfernt, so wird die Wirkung der polarisierten Teilchen an und für sich auf eine in das Innere gebrachte Einheitsladung werden $\frac{4\pi\mathfrak{P}}{3}$ bzw. $\frac{4\pi N\mathfrak{p}}{3}$,

wenn wir $\mathfrak{P}$ auf elektrostatisch gemessene Ladungen beziehen.

Auf die Ableitung dieser Beziehung soll hier nicht eingegangen werden. Sie ist vollkommen analog der bekannten Ableitung der Kraft in einer kugelförmigen Höhlung eines magnetisierten Mediums. Zu der Kraft

$$\frac{4\pi N\mathfrak{p}}{3}$$

kommt die äußere Feldintensität hinzu. Es ist daher die auf ein Elektron pro Einheit der elektrostatisch gemessenen Ladung einwirkende Kraft, welche wir die „innere Feldintensität" genannt haben,

(1) $$\mathfrak{E}_i = \mathfrak{E} + \frac{4\pi}{3}\mathfrak{P} = \mathfrak{E} + \frac{4\pi N\mathfrak{p}}{3}.$$

Bezüglich des eigenen Feldes des Elektrons ist zu bemerken, daß das Elektron im Ruhezustande von seinem eigenen Felde keinen Bewegungsantrieb erhalten kann. Bei einer beschleunigten Bewegung tritt eine elastische Kraft im Äther auf, welche sich der Bewegung widersetzt. Wir hatten für diese Kraft früher den Ausdruck gefunden

$$\frac{d}{dt}\int \mathfrak{V}\mathfrak{H}\mathfrak{D}\,d\tau.$$

Bei einer gleichförmigen geradlinigen Bewegung z. B. einer Kugel ist dieses Integral Null, wenn auch an den einzelnen Stellen des Äthers die Kraft

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{V}\mathfrak{H}\mathfrak{D}$$

nicht verschwindet. Bei der Schwingung des Elektrons tritt diese Kraft in Wirkung, d. h. das Feld des Elektrons wird in einer Weise deformiert, daß es eine Rückwirkung auf das Elektron ausübt. Zusammen mit der von der positiven Ladung

herrührenden Kraft bildet sie die nach dem Hookeschen Gesetz wirkende elastische Kraft, d. h. eine Kraft, welche gleich ist dem Produkt aus der elektromagnetischen Masse, dem Quadrate der Schwingungsfrequenz und der Entfernung aus der Gleichgewichtslage. — Im folgenden sind die Voraussetzungen, welche wir von den Molekülen und ihren Bewegungen machen, zusammengestellt. Im wesentlichen sind es dieselben Annahmen, welche Planck[1]) macht.

1. Obwohl die Spektralerscheinungen die Annahme berechtigen, daß auch die positiven Körperatome, welche, wie wiederholt bemerkt, sich endgültig wohl als rein elektromagnetisch erweisen möchten, Lichtschwingungen erregen können, so wollen wir uns doch darauf beschränken, die Schwingungen des Elektrons zu berücksichtigen.

2. Die Durchschnittsdimension eines Teilchens sei sehr klein im Vergleich mit dem durchschnittlichen Abstand eines Teilchens von einem benachbarten Teilchen. Letzterer sei klein im Vergleich mit der Wellenlänge.

3. Das Elektron habe eine Amplitude, welche sehr klein sei im Vergleich mit seiner linearen Durchschnittsdimension.

4. Das Elektron sei in Ruhe, wenn es nicht von periodischen elektromagnetischen Störungen angeregt wird.

5. Die Substanz sei nicht leitend und isotrop.

Die gemachten Voraussetzungen gestatten unter anderem, die Wirkung der in dem Lichtstrahl bestehenden magnetischen Kraft zu vernachlässigen.

Wir wollen zunächst die Eigenschwingungen eines Elektrons untersuchen. Ein Elektron von der elektromagnetischen Masse m führt unter dem Einflusse einer elastischen Kraft gedämpfte Schwingungen aus. Es ist zweckmäßig, die Bewegungsgleichung aus Energiebetrachtungen abzuleiten.[2]) Die

1) M. Planck, Sitz. d. K. Preuß. Akad. d. Wiss.: Zur elektromagnetischen Theorie der Dispersion, 1902, Vol. XXIV, p. 470.

2) Die Art meiner Ableitung scheint neu zu sein. Die Natur der elastischen Kraft wird dabei nicht näher begründet. Dafür sind aber die Konstanten der Bewegungsgleichung sämtlich physikalisch definiert.

Energie des Elektrons besteht in jedem Zeitpunkte aus einem gewissen Betrage von kinetischer Energie der Masse m und aus der potentiellen Energie, welche durch die Verschiebung des Elektrons aus seiner Gleichgewichtslage bedingt ist. Diese Gesamtenergie würde konstant bleiben, wenn die Dämpfung nicht vorhanden wäre. Die Änderung der Energie pro Zeiteinheit ist daher gleich der in der Zeiteinheit ausgestrahlten Energie.

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{p}$ das elektrische Moment der Ladung q des Elektrons, so ist $\frac{\mathfrak{p}}{q}$ die Verschiebung aus der Gleichgewichtslage. Folglich ist die kinetische Energie

$$W_K = \frac{1}{2}\frac{m}{q^2}\dot{\mathfrak{p}}^2. \tag{2}$$

Die potentielle Energie ist gleich der elastischen Kraft multipliziert mit der halben Verschiebung aus der Gleichgewichtslage. Bezeichnen wir die Anzahl der Eigenschwingungen in 2π Sekunden mit n_0, so wird bekanntlich

$$W_P = \frac{n_0^2 m \mathfrak{p}^2}{2q^2}. \tag{3}$$

Die pro Zeiteinheit von einem schwingenden Elektron abgegebene Strahlungsenergie haben wir auch bereits berechnet (siehe S. 95). Wir können daher, wie man leicht erkennt, setzen

$$W_s = \frac{2}{3}\dot{\mathfrak{p}}^2 n_0^2 v^{-3}. \tag{4}$$

Führen wir nunmehr die Bedingung ein, daß die pro Zeiteinheit vom Elektron abgegebene Energie gleich der durch Strahlung verlorenen ist, so findet man

$$-\frac{dW_K}{dt} - \frac{dW_P}{dt} = W_s \tag{4a}$$

und durch Einsetzen

$$m\ddot{\mathfrak{p}} + n_0^2 m\mathfrak{p} = -\frac{2}{3}\dot{\mathfrak{p}}q^2 n_0^2 v^{-3}$$

oder

$$m\ddot{\mathfrak{p}} + \frac{2}{3}\dot{\mathfrak{p}}q^2 n_0^2 v^{-3} + n_0^2 m\mathfrak{p} = 0. \tag{5}$$

Man erkennt, daß bis auf den in $\mathfrak{p}$ enthaltenen Faktor q der erste Summand die gewöhnliche Kraft darstellt, welche der Masse m eine Beschleunigung erteilt. In dem dritten Summanden erkennt man die elastische Kraft wieder und man kann daher den zweiten Term, welcher der Dämpfung Rechnung trägt, als eine Kraft auffassen, welche „Reibung" erzeugt.

Durchsetzt ein Lichtstrahl das isotrope, nicht leitende Medium, so wirkt die im Lichtstrahl bestehende elektrische Kraft auf das Elektron ein und zwingt es zu Schwingungen. Die elektrische innere Feldintensität, welche in einem Medium wirkt, haben wir abgeleitet. Das Produkt aus Feldintensität und Ladung liefert die elektrische Kraft. Diese äußere Kraft ist die Summe der durch Gleichung (5) bestimmten Kräfte. Beachtet man, daß diese Kräfte mit dem Faktor q multipliziert sind, so erkennt man, daß die Beziehung besteht

$$q^2 \mathfrak{E}_i = m\ddot{\mathfrak{p}} + \frac{2}{3}\dot{\mathfrak{p}} q^2 n_0^2 v^{-3} + n_0^2 m \mathfrak{p}.$$

Diese Gleichung läßt sich nach Gleichung (1) auch schreiben

$$q^2 \mathfrak{E} = m\ddot{\mathfrak{p}} + \frac{2}{3}\dot{\mathfrak{p}} q^2 n_0^2 v^{-3} + \mathfrak{p}\left(n_0^2 m - \frac{4\pi q^2 N}{3}\right). \tag{6}$$

Diese Gleichung und die für ein ponderables Medium geltenden Feldgleichungen (I), (II), (III), (IV) liefern nun die Dispersionsformeln. Die Feldgleichungen sind in ihrer Form ganz analog den für den freien Äther abgeleiteten. Wir können daher die Lösung leicht anschreiben. Wir nehmen mit Planck an, die Wellen seien in der XY-Ebene polarisiert und pflanzen sich fort in der Richtung der zunehmenden x, dann liefern die Feldgleichungen in einem nach y und z unbegrenzten Medium

$$\frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2} + \frac{4\pi N \partial^2 p_2}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 E_2}{\partial x^2}. \tag{7}$$

Man setzt zur Lösung

$$E_2 = A\varepsilon^{n\left(it - \frac{lx}{v}\right)}, \tag{8}$$

$$p_2 = a\varepsilon^{n\left(it - \frac{lx}{v}\right)}. \tag{9}$$

Hier bedeutet n die Schwingungsfrequenz der periodischen Welle. n ist reell, während A, a und

$$l = \varkappa + i\mu \tag{10}$$

komplex sind. Der imaginäre Teil von l liefert den Brechungskoeffizienten μ und der reelle Teil den Extinktionskoeffizienten $\varkappa$.

Aus Gleichung (6) und (7) folgt

$$l^2 = -1 - \frac{\frac{4\pi N q^2}{m}}{n_0^2 - n^2 - \frac{4\pi q^2 N}{3m} + \frac{2}{3}\frac{n_0^2 n}{m} q^2 v^{-3} i}.$$

Zur Abkürzung setzen wir nach Analogie der Planckschen Entwickelungen

$$\frac{4\pi q^2 N}{3 n_0^2 m} = g$$

und ferner

$$\alpha = \frac{n^2 - (1-g) n_0^2}{3 g n_0^2}, \tag{10a}$$

$$\beta = \frac{2}{9}\frac{n v^{-3} q^2}{m g}. \tag{10b}$$

Dann ergibt sich

$$\mu^2 = \frac{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2-\alpha)^2+\beta^2} + (\alpha^2+\beta^2-\alpha)}{2(\alpha^2+\beta^2)},$$

$$\varkappa^2 = \frac{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2-\alpha)^2+\beta^2} - (\alpha^2+\beta^2-\alpha)}{2(\alpha^2+\beta^2)}.$$

Die Ausdrücke für μ^2 und $\varkappa^2$ lassen sich nach steigenden Potenzen von β entwickeln, wenn man diejenigen Werte von n ausnimmt, für welche α nahe gleich Null oder nahe gleich Eins wird.

α wird Null für $n = n_1$, wenn

$$n_1 = n_0\sqrt{1-g};$$

α wird Eins, wenn $n = n_2$, wo

$$n_2 = n_0\sqrt{1+2g}.$$

Planck denkt sich nun um diese beiden Stellen im Spektrum kleine Bezirke abgegrenzt, in welchen $\frac{3m\alpha v^3}{2\pi n_0 q^2}$ bzw. $\frac{3m(\alpha-1)v^3}{2\pi n_0 q^2}$ kleine Werte haben. Außerhalb dieser singulären Bezirke lassen sich dann μ^2 und $\varkappa^2$ in sehr schnell konvergierende, nach Potenzen

von β^2 aufsteigende Reihen entwickeln. Bleibt man bei den niedrigsten Potenzen stehen, so wird für $n < n_1$ $(\alpha < 0)$ und für $n > n_2$ $(\alpha > 1)$

$$\mu^2 = 1 - \frac{1}{\alpha} \quad \text{und} \quad \varkappa^2 = \frac{\beta^2}{4\alpha^2(\alpha - 1)}. \tag{11}$$

Es wächst hier also μ mit n. Wir haben normale Dispersion. Für unendlich lange Wellen erhält man $\varkappa = 0$ und die bekannte Clausius-Mosottische Formel

$$\mu^2 = \frac{1 + 2g}{1 - g}, \tag{12}$$

dagegen für $n_1 < n < n_2$ $(0 < \alpha < 1)$

$$\mu^2 = \frac{\beta^2}{4\alpha^2(1 - \alpha)}, \quad \varkappa^2 = \frac{1}{\alpha} - 1. \tag{13}$$

Es ist dies das Gebiet der anormalen Dispersion. Setzt man (10a) in (11) ein, so ergibt sich der Brechungskoeffizient der normalen Dispersion

$$\mu^2 = 1 + \frac{3g n_0^2}{(1 - g) n_0^2 - n^2} \quad \text{oder} \quad \frac{\mu^2 + 2}{\mu^2 - 1} = \frac{1}{g}\left(1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}\right),$$

wenn die Wellenlängen an Stelle der Schwingungsfrequenzen eingeführt werden. λ bedeutet dann die Wellenlänge im Vakuum.

Setzt man den Wert von g ein, so folgt

$$\frac{\mu^2 + 2}{\mu^2 - 1} = \frac{3 n_0^2 m}{4\pi N q^2}\left(1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}\right).$$

Nun hat Lorentz die Kettelerschen Messungen an Wasserstoff von 0^0 und Atmosphärendruck durch die Näherungsformel

$$\frac{\mu^2 + 2}{\mu^2 - 1} \quad \text{oder} \quad \frac{3}{2(\mu - 1)} = p - \frac{s}{\lambda^2}$$

dargestellt, wo

$$p = 10707 \quad \text{und} \quad s = 0{,}0739 \times 10^{-5}\,\text{cm}^2.$$

Dann folgt nach obigem

$$g = 9{,}34 \times 10^{-5},$$

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{s}{p}} = 8{,}31 \times 10^{-6}\,\text{cm}.$$

Da nun N die Loschmidtsche Zahl bekannt ist, so ergibt die Gleichung für g einen Wert für $\frac{q^2}{m}$. Dieser stimmt gut mit dem bereits auf anderem Wege erhaltenen überein.

Anhang.

Die Hauptformeln der Vektorenrechnung.

Vektoren werden durch deutsche Buchstaben gekennzeichnet. Es wird ein Rechtssystem zugrunde gelegt. Die Grundvektoren i, j, t entsprechen in ihrer Aufeinanderfolge einem Rechtssystem. Die Absolutwerte der Komponenten eines Vektors in der i-, j-, t-Richtung werden durch die Indices 1, 2, 3 bezeichnet, z. B.

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{i} A_1 + \mathfrak{j} A_2 + \mathfrak{t} A_3. \tag{1}$$

Der Tensor des Vektors von $\mathfrak{A}$ wird mit A bezeichnet. Ein Einheitsvektor in der Richtung $\mathfrak{A}$ wird durch den Index 1 kenntlich gemacht, z. B.

$$\mathfrak{A} = A \cdot \mathfrak{A}_1. \tag{2}$$

Das skalare Produkt zweier Vektoren wird durch einfache Nebeneinanderstellung gekennzeichnet

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = AB \cos(\mathfrak{A}\mathfrak{B}). \tag{3}$$

Das Vektorprodukt von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ wird $V\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ geschrieben.

$$V\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \begin{vmatrix} \mathfrak{i}, & \mathfrak{j}, & \mathfrak{t}, \\ A_1, & A_2, & A_3 \\ B_1, & B_2, & B_3 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Der Zahlenwert von $V\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ist $AB \sin(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$.

$$V\mathfrak{A}V\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{C} - \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{B}. \tag{5}$$

Die Punkte werden in Gleichung (5), wie überhaupt, als Trennungszeichen angewandt.

$$\mathfrak{A}V\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \begin{vmatrix} A_1, & A_2, & A_3 \\ B_1, & B_2, & B_3 \\ C_1, & C_2, & C_3 \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Man erkennt aus der Determinante, daß $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ zyklisch vertauscht werden dürfen.

Der Operator ∇ hat die Bedeutung

$$\nabla = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathrm{f}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{7}$$

Der Ausdruck $\nabla\mathfrak{A}$ wird die Divergenz von $\mathfrak{A}$ genannt und kann als skalares Produkt von ∇ und $\mathfrak{A}$ aufgefaßt werden.

$$\nabla\mathfrak{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}. \tag{8}$$

$$\nabla A = \mathrm{i}\frac{\partial A}{\partial x} + \mathrm{j}\frac{\partial A}{\partial y} + \mathrm{f}\frac{\partial A}{\partial z}. \tag{9}$$

Das vektorielle Produkt von ∇ und $\mathfrak{A}$ wird als der curl von $\mathfrak{A}$ bezeichnet und nach Analogie der Vektorprodukte ist der curl $\mathfrak{A}$ bestimmt durch die Determinante

$$\operatorname{curl}\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} \mathrm{i}, & \mathrm{j}, & \mathrm{f}, \\ \frac{\partial}{\partial x}, & \frac{\partial}{\partial y}, & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1, & A_2, & A_3 \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Radiusvektoren werden mit $\mathfrak{r}$ bezeichnet.

$$\frac{dA}{dr} = (\mathfrak{r}_1\nabla)\,A = \mathfrak{r}_1\,(\nabla A). \tag{11}$$

$$\mathfrak{A}\,d\mathfrak{A}_1 = 0. \tag{12}$$

$$\nabla r = \mathfrak{r}_1. \tag{13}$$

$$\nabla\frac{1}{r} = -\frac{\mathfrak{r}_1}{r^2}. \tag{14}$$

$$\operatorname{curl}\nabla A = 0. \tag{15}$$

$$\operatorname{div}\operatorname{curl}\mathfrak{A} = 0. \tag{16}$$

$$\nabla A\mathfrak{B} = A\nabla\mathfrak{B} + \mathfrak{B}\nabla A. \tag{17}$$

$$\operatorname{div}\mathrm{V}\,\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\operatorname{curl}\mathfrak{A} - \mathfrak{A}\operatorname{curl}\mathfrak{B}. \tag{17a}$$

$$\operatorname{curl} A\mathfrak{B} = A\operatorname{curl}\mathfrak{B} + \mathrm{V}\nabla A\cdot\mathfrak{B}. \tag{18}$$

$$\operatorname{curl}^2\mathfrak{A} = \nabla\cdot\nabla\mathfrak{A} - \nabla^2\mathfrak{A}. \tag{19}$$

$$\operatorname{curl}\mathrm{V}\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}(\nabla\mathfrak{B}) - \mathfrak{B}(\nabla\mathfrak{A}) + (\mathfrak{B}\nabla)\,\mathfrak{A} - (\mathfrak{A}\nabla)\,\mathfrak{B}. \tag{20}$$

$$(\mathfrak{A}\nabla)\,\mathfrak{B} = \nabla_{\mathfrak{B}}\,\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathrm{V}\operatorname{curl}\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{A}. \tag{21}$$

Der Index $\mathfrak{B}$ bedeutet, daß sich die Variation nur auf den Faktor $\mathfrak{B}$ zu erstrecken hat.